QUINTANA ROO
GOBIERNO DEL ESTADO
2016 • 2022

MÁS Y MEJORES
OPORTUNIDADES

COLEGIO DE
BACHILLERES

CUADERNILLO DE

CÁLCULO INTEGRAL

IV

SEMESTRE

Nombre: ______________________________

Grupo: ______________________________

Directorio

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

Mtra. Yolanda del Rosario Loria Marín
Directora Académica

Lic. Mario Velázquez George
Subdirector Académico

Mtra. Cindy Jazmín Cuellar Ortiz
Jefa del Departamento de Docencia y Apoyo Académico

Elaboración:
Ing. Cornelio Chan Martin**, Docente del Centro EMSaD Cobá**
Ing. Edwin Pérez Peraza**, Docente del Centro EMSaD Chiquilá**
Lic. Florencio Espadas Canché**, Docente del Centro EMSaD Chan chen**
Ing. Jesús Israel Marín Poot**, Docente del Centro EMSaD Puerto Aventuras**

Coordinación de la primera versión:
Ing. Asareli Solano Hernández, **Apoyo académico del departamento de EMSaD**

Revisión, edición y actualización:
Ing. Felipe de Jesús Tox Pereyra, **Docente del plantel Chetumal Dos**

Colaboración:
Mtra. Jessica Vianey Cortés Talamantes**, Jefa de materia del área de matemáticas**

Diseño de portada:
Lic. Juan Naim Góngora Piña, **Responsable del Área de Comunicación y Difusión**

Avenida Héroes #310 entre Justo Sierra y Bugambilias
Col. Adolfo López Mateos
Chetumal, C.P. 77010, Othón P. Blanco, Quintana Roo

PRESENTACIÓN

Estimada y estimado estudiante:

Me es grato darte la bienvenida al nuevo semestre que estás por iniciar. En la Dirección General del Colegio de Bachilleres de Quintana Roo, somos conscientes de las circunstancias que te rodean y que han afectado al mundo desde hace más de año y medio; por ello, el cuadernillo que ahora posees, es producto de un esfuerzo y trabajo conjuntos entre los docentes y los responsables de las áreas académicas de nuestras oficinas centrales.

Si bien es cierto la pandemia continúa, ello no representa un impedimento para no cumplir con nuestra labor educativa, razón esencial de nuestra gran institución. Por ello, hoy más que nunca, la labor académica es vital para alcanzar nuestro principal objetivo: tu formación escolar que contribuya a consolidar tu proyecto de vida.

El contenido de este *Material didáctico del estudiante*, te permitirá continuar con tu proceso de enseñanza-aprendizaje desde casa. Por supuesto, estarás respaldado por la asesoría y seguimiento de cada uno de tus docentes y autoridades educativas.

Cada una de las personas que laboramos en el Colegio de Bachilleres del Estado de Quintana Roo ponemos lo mejor de nosotros para seguir caminando juntos, aun en la pandemia, generando resiliencia y fortaleciendo las competencias académicas y socioemocionales que nos permitan salir adelante.

Te invito a no bajar la guardia en lo académico y en el cuidado de tu salud. Trabaja intensamente, con compromiso y con responsabilidad; sé responsable y perseverante, ello te llevará al éxito y a cumplir tus metas. Te deseo lo mejor para este semestre que inicia.

Dr. Rafael Ignacio Romero Mayo
Director General

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Nuestro compromiso es continuar generando estrategias que te permitan fortalecer los aprendizajes de las diversas asignaturas, por esta razón ponemos a tu disposición este documento, el cual se construyó con la participación de maestras y maestros del área de matemáticas de todo el estado, quienes con mucha dedicación y esfuerzo diseñaron actividades tomando en consideración los aprendizajes esperados y las competencias de los programas de estudio y que estamos seguros te permitirán continuar con tu formación académica.

Es importante mencionar que, este cuadernillo contiene una serie de actividades que te permitirán alcanzar los aprendizajes esperados de la asignatura de Cálculo Integral, cuyo propósito principal es permitirte entender diversos fenómenos de tu entorno analizándolo tanto de forma cuantitativa como cualitativa, además de propiciar el desarrollo de las capacidades de abstracción y razonamiento mediante la aplicación de la integral.

Esta asignatura se compone de 4 bloques, iniciaremos relacionando los conceptos de derivada e integración. Posteriormente, en el Bloque 2 y 3 comprenderás los teoremas esenciales de integración y finalmente las aplicaciones de la integral en el bloque 4. Cada actividad contiene una lectura previa que te permitirá comprender los contenidos principales, posteriormente encontrarás las instrucciones precisas para desarrollarla y la descripción del instrumento con la que será evaluada. Se hace énfasis en que practiques el proceso de autoevaluación, de tal manera que puedas reflexionar sobre las dificultades a las que te enfrentaste y los aprendizajes que lograste al final de cada bloque, no olvides tomar nota en tu libreta de todo aquello que observaste en tu proceso de aprendizaje para que posteriormente puedas comentar con tu maestra o maestro.

También, considera dos herramientas básicas para el desarrollo de las actividades como lo son: tener a la mano un juego de geometría o cualquier objeto que te permita realizar trazos en tu libreta, así como recuperar la calculadora científica del semestre anterior para realizar algunos cálculos matemáticos implicados en las actividades.

Te recomendamos dedicar un horario determinado de estudio ya que las realizarás a través de la autogestión, encuentra un espacio en casa que te permita estar cómodo y con el menor número de distracciones, así como revisa las instrucciones de cada actividad para completarla con éxito.

Recuerda que las matemáticas son importantes en tu formación, pues promueven el razonamiento, al mismo tiempo desarrolla tu capacidad de análisis, tu pensamiento crítico, tomar decisiones informadas e imaginar soluciones posibles a problemas. Algunas actividades te pueden parecer fáciles, otras quizá más difíciles, pero no te desanimes, con un poco de esfuerzo y perseverancia estamos seguros que podrás concluirlas satisfactoriamente.

Finalmente, es necesario que te mantengas comunicado con tu maestro o maestra para establecer las fechas y los mecanismos de entrega, así como los criterios de evaluación, no te sientas solo, estamos para apoyarte y acompañarte en este camino.

¡Éxito!

¿CON QUÉ CONOCIMIENTOS PREVIOS CUENTO?

Instrucciones

El propósito de esta sección es reflexionar acerca de los conocimientos previos con los que cuentas. Elige y subraya correctamente la opción que conteste las siguientes cuestiones.

1. ¿Cuál es el incremento de la $f(x) = x^2 - 1$ en el intervalo $[3, 5]$?
   A. $\Delta y = 8$ B. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$ C. $\Delta x = 2$ D. $\Delta y = 16$

2. Si la base de un rectángulo es $\frac{2}{5}$ y su altura está determinada por la función $h(x) = x^2 - 4$ en $x = 3$. ¿Cuál es el valor de su área?
   A. $A = 5\,u^2$ B. $A = \frac{2}{5}\,u^2$ C. $A = 2\,u^2$ D. $A = 10\,u^2$

3. Si una sucesión está definida por $a_n = 2 + 5 + 8 + 11$ ...¿Cuál es el valor de la suma de los primeros 10 términos?
   A. $A = 26$ B. $A = 126$ C. $A = 57$ D. $A = 155$

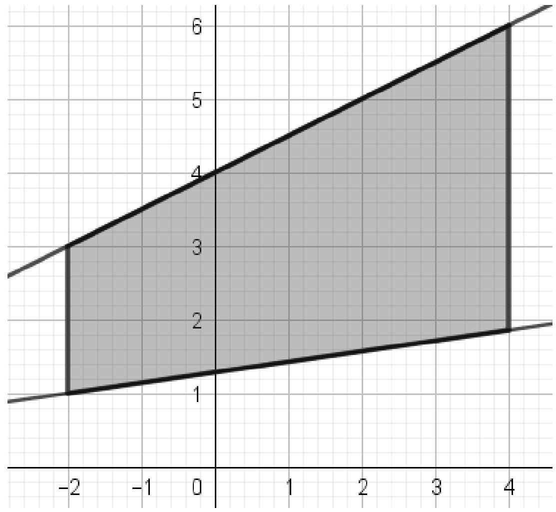
4. ¿Cuál es la representación en notación sigma de la suma $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}$?
   A) $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{2+i}$ B) $\sum_{i=3}^{7} \sqrt{i}$ C) $\sum_{i=7}^{3} \sqrt{i}$ D) $\sum_{i=1}^{5} \sqrt{i}$

5. Además de $f'(x)$ ¿Cómo puedes representar la derivada de una función?
   A. $\frac{dy}{dx}$ B. y C. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ D. Δy

6. La derivada de $g(x) = \sqrt{2x+1}$
   A. $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ B. $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{(2x+1)^3}}$ C. $g'(x) = \sqrt{(2x+1)^3}$ D. $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

7. Si la derivada de una función es $f'(x) = x^2$ ¿Cuál de las siguientes funciones podría decirse que es su antiderivada?
   A. $f(x) = x^3$ B. $f(x) = \frac{x^3}{3}$ C. $f(x) = 2x$ D. $f(x) = 2x^3$

8. Con tus conocimientos de geometría describe un procedimiento que puede emplearse para determinar el área sombreada de la figura y determina el valor aproximado de dicha área.



BLOQUE I. DIFERENCIALES

Actividad 1. Concepto de Diferencial de una función.

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Resuelve por medio de diferenciales, problemas reales y/o hipotéticos de su entorno utilizando el cálculo de raíces de manera metódica y organizada, reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.
- **Atributo (s):**
  - Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
  - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):**
  - Concepto de Diferencial: Analítico y Geométrico

Lectura previa: Concepto analítico del diferencial de una función.

En general se le llama diferencial a cualquier valor sumamente pequeño o infinitesimal, que resulta de la diferencia entre dos valores. Por ejemplo, si se tiene 1.9999 y 2, se dice que su diferencial es 0.0001. En el cálculo del limite de una función, se pueden encontrar estos diferenciales de manera que pueden acercarse a un determinado valor, sin tocarlo, y partir de ello es posible deducir un resultado o una conclusión respecto al límite de la función.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Figura 1. Definición de la derivada de una función.

El concepto de diferencial puede aplicarse para cantidades, así como también para las funciones. Para el caso de las funciones está involucrada la derivada, como verás a continuación.

Puesto que la derivada de una función se define a través de un límite (figura 1), esto implica también que se encuentran involucrados los diferenciales.

Analíticamente, el diferencial de una función dy, es el producto de la derivada de la función $f'(x)$ por el diferencial de la variable independiente dx, la cual se obtiene despejando dy de la notación de Leibniz[1] para la derivada, como se muestra a continuación:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Notación de Leibniz para la derivada

Despejando

$$dy = f'(x)dx$$

Diferencial de la función

Figura 2. Obtención analítica del diferencial de una función

En esta definición, dx y dy tienen significados por separado:

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Matemático, filósofo y politólogo alemán considerado, junto con Newton, el descubridor del Cálculo Infinitesimal.

- dx es el diferencial de variable independiente x y coincide con el valor de su incremento Δx. Es decir: $dx = \Delta x$.
- dy es el diferencial de la función $f(x)$ y bajo ciertas condiciones dy se aproxima al incremento de la función Δy. Es decir: $dy \cong \Delta y$

Notación del diferencial.
La diferencial de una función se representa por medio de la letra d colocada delante de la función. Por ejemplo:

- Si la función es $y = x^2$, su diferencial es $dy = 2xdx$; y se lee: "diferencial de $\boldsymbol{y}$".
- Si la función es $f(x) = x^3$, su diferencial es $df(x) = 2xdx$; y se lee: "diferencial de f de x.

Observa y analiza los ejemplos de la siguiente tabla.

Tabla 1. Ejemplos de diferenciales

Función $\boldsymbol{y = f(x)}$	Derivada $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$	Diferencial $\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$	Función $\boldsymbol{y = f(x)}$	Derivada $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$	Diferencial $\boldsymbol{dy = f'(x)dx}$
$\boldsymbol{y = x^3}$	$\frac{dy}{dx} = 3x^2$	$dy = 3x^2dx$	$\boldsymbol{y = 3x}$	$\frac{dy}{dx} = 3$	$dy = 3dx$
$\boldsymbol{y = 4x^2}$	$\frac{dy}{dx} = 8x$	$dy = 8xdx$	$\boldsymbol{y = x}$	$\frac{dy}{dx} = 1$	$dy = dx$

Como habrás notado en los ejemplos de la tabla 1, el diferencial de la función implica derivar y multiplicar por dx. Sin embargo, de manera general, cada una de las reglas de derivación se puede asociar una regla de diferenciación, ya que presentan entre ellas una gran similitud.
Por lo tanto, si has aprendido y memorizado las fórmulas para las derivadas, entonces no tendrás dificultad en aprender las fórmulas de las diferenciales, las cuales se aprecian en la siguiente tabla:

Tabla 2. Reglas básicas para la obtención de diferenciales

REGLAS BÁSICAS DE DIFERENCIACIÓN		
1. $\boldsymbol{d(c) = 0}$	2. $\boldsymbol{d(x) = dx}$	3. $\boldsymbol{d(cx) = c\ dx}$
4. $\boldsymbol{d(u + v - w) = du + dv - dw}$	5. $\boldsymbol{d(uv) = u\ dv + v\ du}$	6. $\boldsymbol{d(x^n) = nx^{n-1}dx}$
7. $\boldsymbol{d(v^n) = nv^{n-1}dv}$	8. $\boldsymbol{d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}}$	9. $\boldsymbol{d(ln\, v) = \frac{dv}{v}}$
10. $\boldsymbol{d(a^u) = a^u\, ln\, a\ \ du}$	11. $\boldsymbol{d(e^u) = e^u\ du}$	12. $\boldsymbol{d(sen\, u) = cos\, u\, du}$
13. $\boldsymbol{d(cos\, u) = -sen\, u\, du}$	14. $\boldsymbol{d(\tan u) = sec^2\, u\, du}$	

Ejemplo 1 *Determina el diferencial de la función $y = sen\ 4x$*

Solución:
Por la forma de la función puede asociarse con la regla 12 de las reglas para diferenciales, por lo tanto:

Identificando:	$u = 4x\ ;\ du = 4$
Aplicando la regla 12:	$d(sen\ 4x) = \cos 4x \cdot 4$
Sustituyendo $y = sen\ 4x$, en la expresión anterior y multiplicando por dx, se obtiene la diferencial como:	$dy = 4\cos 4x\, dx$

Ejemplo 2 *Determina el diferencial de la función $f(x) = \sqrt{5x-4}$*

Solución:
Intercambiando $y = f(x)$ y expresando en notación de potencia la función se tiene que: $y = (5x-4)^{\frac{1}{2}}$.

Identificando a v y calculando dv:	$v = 5x - 4x\ ;\ dv = 5$
Aplicando la regla 7 con $n = \frac{1}{2}$ y los datos anteriores:	$d(5x-4)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}(5x-4)^{-\frac{1}{2}-1}(5)$
Realizando las operaciones indicadas:	$d(5x-4)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{2}(5x-4)^{-\frac{1}{2}}$
Expresando con potencias positivas:	$d(5x-4)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{2}\left[\dfrac{1}{(5x-4)^{\frac{1}{2}}}\right]$
Expresando en forma de radical:	$d(5x-4)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-4}}$
Sustituyendo $y = (5x-4)^{\frac{1}{2}}$, en la expresión anterior y multiplicando por dx, se obtiene la diferencial:	$dy = \dfrac{5}{2\sqrt{5x-4}}dx$

ACTIVIDAD 1 *Determina el diferencial de las siguientes funciones:*

A. $y = 4x^6$	B. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$	C. $y = 4x^2 - \frac{3}{x} + \sqrt{x}$
D. $g(x) = 3e^{-5x+1}$	E. $h(x) = \ln(3x-2)$	F. $y = \tan(5x)$
G. $f(x) = (2x^2+3)(5x+3)$	*H.* $f(x) = 5(3x^2-2x)^4$	

Esta actividad se evalúa con el instrumento de evaluación del **Anexo B.**

Actividad 2. Aproximación de variables

➢ **Aprendizaje Esperado:**

- Resuelve por medio de diferenciales, problemas reales y/o hipotéticos de su entorno utilizando el cálculo de raíces de manera metódica y organizada, reconociendo sus fortalezas y áreas de oportunidad.

➢ **Atributo (s):**

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

➢ **Conocimiento (s):**

- Aproximación de variables.

Lectura previa: La diferencial como aproximación del incremento

Interpretación geométrica de la diferencial

De la figura 3, se puede observar que la recta T es tangente al punto P. La pendiente de la recta T se puede obtener de dos formas:

1. A partir de la definición de la tangente respecto al ángulo τ, siendo el cateto opuesto Δy y el cateto adyacente Δx, es decir: $m_T = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
2. La derivada de la función en el punto P, es la pendiente de la tangente a la función en dicho punto, es decir: $m_T = f'(x)$.

Puesto que las pendientes son iguales, igualando las dos expresiones anteriores, se tiene que: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Despejando el incremento en y, se obtiene: $\Delta y = f'(x)\Delta x$.

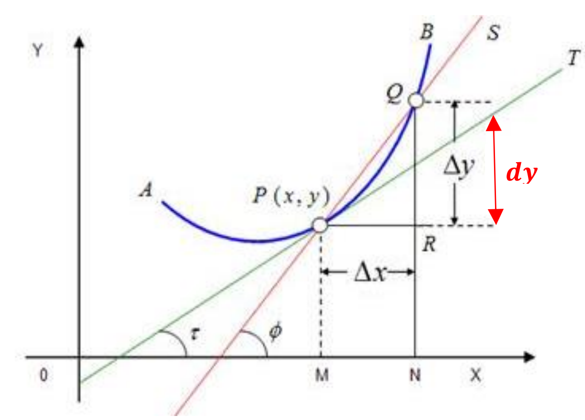


Figura 3. Significado geométrico del diferencial de una función.

Como la elevación se produce verticalmente a partir del punto P, el incremento en x (Δx) que se tome representa el alejamiento horizontal que se haga desde el punto P. Por lo tanto, la elevación de la tangente (Δy) que se obtenga depende del alejamiento horizontal que se tomen, es decir de Δx. Es decir, a medida que se incrementa Δx desde P, existe una variación de Δy que tiende a aumentar pero que también podría disminuir, por lo tanto, se le llama diferencial de "**y**", y se denota como dy; por otro lado, el incremento en x se llama diferencial de x y se denota como dx. Como $\Delta y = f'(x)\Delta x$, y $\Delta y = dy$ y $\Delta x = dx$, entonces: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ y por lo tanto $dy = f'(x)dx$. En esta misma figura, se puede apreciar que el diferencial de una función es la longitud de la elevación de la tangente desde el punto P hasta la propia tangente y que bajo ciertas condiciones es posible conocer su longitud, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3 *Hallar el valor del diferencial de la función $y = \sqrt{x+3}$ en x=2 y $\Delta x = 0.04$*

Solución:

Reescribiendo la función en términos de potencias fraccionarias:	$y = (x+3)^{1/2}$
Aplicando la regla 7 de la tabla 2:	$v = x + 3\ ;\ dv = 1$ y $n = \frac{1}{2}$ $dy = \frac{1}{2}(x+3)^{-1/2}(1)$
Realizando las operaciones:	$dy = \frac{(x+3)^{-1/2}}{2}$
Expresando con potencia positiva:	$dy = \frac{1}{2(x+3)^{1/2}}$
Expresando con radicales:	$dy = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$
Multiplicando por dx, para obtener el diferencial:	$dy = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}dx$
Sustituyendo las condiciones iniciales, $x = 2$ y $\Delta x = 0.04$ y realizando las operaciones:	$dy = \frac{1}{2\sqrt{2+3}}(0.04) = \frac{0.04}{2\sqrt{5}} = 0.008944271$

Este último valor es el valor del diferencial con las condiciones dadas.

La diferencial como aproximación de variables.

Si bien el incremento de la función (Δy) no es igual a la diferencial de y (dy), en cierto momento y cuando dx se hace cada vez más pequeño estos valores son aproximadamente iguales. Esta característica permite utilizar el diferencial como elemento de aproximación, a partir de la siguiente expresión:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

Como $dy = f'(x)\Delta x$, entonces el incremento de la función tiene la forma:

$$f(x + \Delta x) \cong f(x) + f'(x)\Delta x$$

En esta última expresión si se conoce el valor inicial (x_1) y el incremento Δx, entonces el incremento de la variable a partir de dicho valor, se expresa como:

$$f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\Delta x$$

Donde:

x_1	valor inicial
Δx	incremento en x
$f(x_1 + \Delta x)$	valor aproximado del incremento de la función
$f(x_1)$	valor inicial de la función
$f'(x_1)$	valor de la derivada en el punto inicial

La expresión anterior es la base de la aproximación de variables, que se puede realizar a través del siguiente procedimiento:

1. Identifica el valor final como $\boldsymbol{x_2}$, que es el valor que se desea estimar.
2. Determina el valor inicial $\boldsymbol{x_1}$, como el más cercano al valor que se va a estimar, de manera que se conozca su valor exacto.
3. Determina el incremento de la variable como $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1}$
4. Identifica una función asociada a la forma de la función relacionada con la variable.
5. Determina la derivada de la función establecida en el paso anterior.
6. Aproxima la variable sustituyendo las condiciones iniciales en la expresión de la aproximación del incremento.

Observa los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4 *Emplea el diferencial para obtener el valor aproximado de* $\sqrt{39}$

Solución:

1. x_2 39
2. x_1 36
3. Incremento: $\Delta x = 39 - 36 = 3$
4. Función asociada: $f(x) = \sqrt{x}$
5. Derivada $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. Aproximando: $f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\Delta x$

$$f(36+3) \approx f(36) + f'(36)3$$

$$f(39) \approx \sqrt{36} + \frac{1}{2\sqrt{36}} \cdot 3 = 6 + \frac{3}{2(6)} =$$

$$\approx 6 + \frac{3}{12} = 6 + \frac{1}{4}$$

$$\approx 6 + 0.25 = 6.25$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{39} \approx 6.25$$

Valor con la calculadora

Como puede observar el valor de la raíz aproximada es casi igual al valor que se obtiene en la calculadora, con una mínima diferencia.

Ejemplo 5 — *Calcular el valor aproximado de* $\sqrt{80}$

Solución

1. x_2 — 80
2. x_1 — 81
3. Incremento: $\Delta x = 80 - 81 = -1$
4. Función asociada: $f(x) = \sqrt{x}$
5. Derivada: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6. Aproximando:

$$f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\Delta x$$
$$f(81-1) \approx f(81) + f'(81)(-1)$$
$$f(80) \approx \sqrt{81} + \frac{1}{2\sqrt{81}} \cdot (-1) = 9 - \frac{1}{2(9)}$$
$$\approx 9 - \frac{1}{18} = 9 - 0.05 = 8.95$$

Por lo tanto:

$\sqrt{80} \approx 8.95$

Valor con la calculadora

Ejemplo 6 — *Calcular el valor aproximado de* $(2.15)^2$

Solución

1. x_2 — 2.15
2. x_1 — 2
3. Incremento: $\Delta x = 2.15 - 2 = 0.15$
4. Función asociada: $f(x) = x^2$
5. Derivada: $f'(x) = 2x$
6. Aproximando:

$$f(x_1 + \Delta x) \approx f(x_1) + f'(x_1)\Delta x$$
$$f(2 + 0.15) \approx f(2) + f'(2)(0.15)$$
$$f(2.15) \approx (2)^2 + 2(2) \cdot (0.15) = 4 + 4(0.15)$$
$$\approx 4 + 0.6 = 4.6$$

Por lo tanto:

$(2.15)^2 \approx 4.6$

Valor con la calculadora

Ejemplo 7 — *Calcular el valor aproximado de sen* $62°$

Solución.

En este caso, se debe convertir los ángulos a radianes[2] $60° = \frac{\pi}{3}\ rad$ y $62° = \frac{31\pi}{90}\ rad$. Con estos datos, aplicamos el procedimiento.

1. x_2 — $\frac{31\pi}{90}$
2. x_1 — $\frac{\pi}{3}$
3. Incremento: $\Delta x = \frac{31\pi}{90} - \frac{\pi}{3} = \frac{31\pi - 30\pi}{90} = \frac{\pi}{90}$

---

[2] Para convertir grados a radianes se multiplican los grados por $\frac{\pi}{180}$.

4. Función asociada: $f(x) = sen\ x$
5. Derivada: $f'(x) = \cos x$
6. Aproximando:

$$f\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{90}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\frac{\pi}{90}$$

$$f\left(\frac{31\pi}{90}\right) \approx sen\ \left(\frac{\pi}{3}\right) + \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]\left(\frac{\pi}{90}\right)$$

$$f\left(\frac{31\pi}{90}\right) \approx \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{90}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{180}$$

$$\approx \frac{180\sqrt{3}+\pi}{180} = \frac{90(1.73)+3.1416}{180}$$

$$\approx \frac{159.02}{180} = 0.90$$

Por lo tanto:

$$(2.15)^2 \approx 4.6$$

Valor con la calculadora

ACTIVIDAD 2 _Determina el valor aproximado de las siguientes variables, usando diferenciales._

A. $\sqrt{9.08}$	B. $(5.8)^2$	C. $\sqrt{398}$	D. $\sqrt[3]{122}$	E. $\cos 60°$

Esta actividad se evalúa con el instrumento de evaluación del **Anexo A** y **Anexo B.**

BLOQUE II. INTEGRAL INDEFINIDA

Actividad 3. Integración de funciones algebraicas.

- **Aprendizaje Esperado:**

  - Utiliza la definición de integral indefinida como herramienta para el cálculo del proceso inverso de la derivada, aplicado a la integral inmediata de una función, favoreciendo su pensamiento crítico y reflexivo.

- **Atributo (s):**
  - Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
  - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

- **Conocimiento (s):**
  - Definición de la integral indefinida.
  - Integrales de funciones: Algebraicas, Trigonométricas y Exponenciales.

Lectura previa: Concepto de integral indefinida e integración

Concepto de integral indefinida

En Cálculo Diferencial aprendiste a determinar la derivada de una función $f(x)$ como $f^{'}(x)$; desde la perspectiva del Cálculo Integral es posible realizar la operación inversa, es decir, determinar la función $f(x)$ a partir de su diferencial.

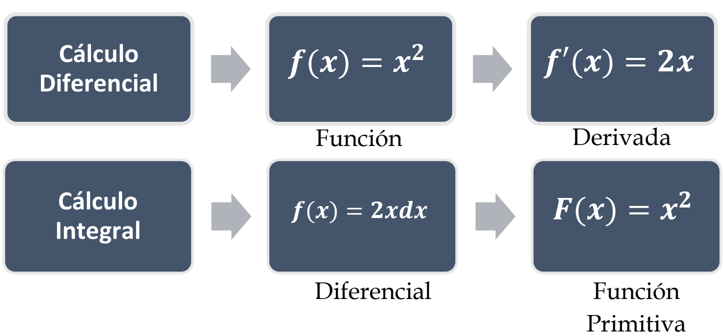


Figura 4. Relación entre el Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.

En este sentido a la función ya derivada $f'(x)$ se denota como $f(x)$; mientras que la función original, $f(x)$ se representa como $F(x)$. A la función F(x) se le conoce también como función primitiva, como se muestra en la figura 4. Con base a lo anterior, podemos concluir que la función primitiva de

$$f(x) = 2x\,dx \text{ es } F(x) = x^2,$$

lo cual significa que para obtener $2x$ se tuvo que haber derivado x^2.

Ahora observa que para obtener como derivada a $2x$, existen múltiples funciones primitivas asociadas a x^2, como se muestra en la tabla 3. Puedes notar que la única diferencia entre dichas funciones primitivas es un valor constante. Puesto que la derivada de una constante es cero, al derivar cada función primitiva se obtiene siempre $2x$.

Tabla 3. Algunas funciones primitivas cuya derivada es 2x.

Función Primitiva	Derivada
$\boldsymbol{F(x) = x^2 + 5}$	
$\boldsymbol{F(x) = x^2 - 10}$	$\boldsymbol{f'(x) = 2x}$
$\boldsymbol{F(x) = x^2 + \frac{5}{4}}$	
$\boldsymbol{F(x) = x^2 + 5.8}$	

Al proceso de hallar la función primitiva se le conoce como integración. Algebraicamente se denota como:

$$\int \boldsymbol{f(x)\, dx = F(x) + C}$$

A la expresión anterior se le conoce como Integral Indefinida. Donde:

$\int$	Símbolo de integral
$f(x)dx$	Integrando
$F(x)$	Función primitiva
C	Constante de Integración

El diferencial dx, indica la variable respecto a la cual se realiza la integración.

Interpretación geométrica de la constante de integración.

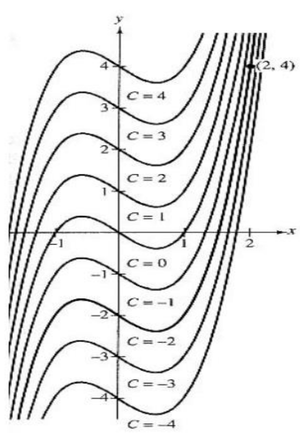


Figura 5. Significado geométrico de la constante de integración.

El resultado de una integral indefinida admite infinitas soluciones que difieren entre ellas en un valor constante, como vimos anteriormente en la tabla 3. En este sentido se dice que el resultado de una integral indefinida corresponde a una familia de funciones primitivas.

Si se trazaran las gráficas de las funciones primitivas, se obtendría la figura 5, donde se puede observar que cada una de dichas primitivas, son traslaciones verticales una de la otra debido a los distintos valores de la constante de integración C.

Bajo ciertas condiciones, el valor de la constante de integración se puede obtener para determinar una solución particular de la integral indefinida.

Integración de funciones algebraicas

Resolver una integral indefinida implica hacer uso de procedimientos algebraicos básicos además de las siguientes reglas básicas de integración que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 4. Reglas básicas de integración

Integral de:	*Fórmula*
1. La Diferencial de una variable:	$\int dx = x + C$
2. De una variable elevada a una potencia:	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
3. Del producto de una constante por una función:	$\int avdv = a \int vdv$
4. Suma de diferenciales de funciones:	$\int (du + dv - dw) = \int du + \int dv - \int dw$
5. De una función elevada a una potencia:	$\int v^n \, dv \; = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$
6. Del logaritmo	$\int \frac{dv}{v} = ln\|v\| + C$

Las reglas anteriores se obtienen directamente de las reglas generales de diferenciación. En su aplicación es indispensable que la función que se pretende integrar cumpla con todos los datos solicitados en la fórmula correspondiente. Algunas consideraciones que pueden realizarse para la integración son:

- Reescribir el integrando a partir de las leyes de los exponentes relacionados con la potencia negativa y potencia fraccionaria.
- Realizar alguna operación indicada en el integrando (producto, división, etc.).
- Verificar que el integrando cumpla con todos los requisitos establecidos en las fórmulas. Esto es, identificar v y dv para verificar su existencia en el integrando.
- En algunos será necesario "completar" la integral, multiplicando y dividiendo el integrando por un valor constante.

i. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

ii. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Figura 6. Leyes de las exponentes involucradas en la integración.

Con base a lo anterior, observa los siguientes ejemplos.

Ejemplo 8 *Calcular* $\int x^3 \, dx$

Solución:

Por la estructura de la función se observa que es una variable elevada a una potencia y cumple con la forma de la fórmula 2 donde $n = 3$. Por lo tanto:

$$\int x^3 \, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$$

Nota que la constante de integración se adiciona una vez realizado los procedimientos involucrados.

Ejemplo 9 *Resolver* $\int 5y^2\,dy$

Solución:
De la estructura de la función se observa que tiene la forma de una constante multiplicada por una función, por lo que se puede asociar con la regla 3 donde $a = 5$; y $dv = dy$. Por lo tanto:

Aplicando la regla 3:	$\int 5y^2\,dy = 5\int y^2 dy$
Resolviendo la integral con la regla 2 y realizando las operaciones indicadas:	$= 5\left(\frac{y^{2+1}}{2+1}\right) = 5\,\frac{y^3}{3}$
Por lo tanto:	$\int 5y^2\,dy = \frac{5y^3}{3} + C$

Ejemplo 10 *Calcula* $\int -2\sqrt{a}\,x\ dx$

Solución:

Se puede notar que la forma de la integral es el producto de una constante[3] por una función. Por lo que se asocia a la regla 3 de la tabla 4, considerando los datos: $a = -2\sqrt{a}$; $v = x$; $dv = dx$

Aplicando la regla 3:	$\int -2\sqrt{a}\,x\ dx = -2\sqrt{a}\int x\,dx$
Aplicando la regla 2 para la integral indicada, con[4] $n = 1$	$= -2\sqrt{a}\left[\frac{x^{1+1}}{1+1}\right]$
Realizando las operaciones indicadas:	$= -2\sqrt{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]$
Simplificando[5] y sumando la constante de integración:	$\int -2\sqrt{a}\,x\ dx = -\sqrt{a}x^2 + C$

Ejemplo 11 *Calcular* $\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}}$

Solución:

Nota que no se puede aplicar directamente ninguna de las fórmulas de la tabla 4. Sin embargo, de las leyes de los exponentes de la figura 7 inciso ii, puede reescribirse el integrando con potencia negativa, como se muestra a continuación:

Reescribiendo la función, aplicando la ley de los exponentes (ii):	$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx$
Asociando la nueva forma con la regla 2 de la tabla 4, con $n = -\frac{2}{3}$:	$= \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}$

[3] Recuerda que en álgebra las primeras letras del alfabeto se relacionan con valores constantes.
[4] Recuerda que, si el exponente de una literal no está indicado, se sobreentiende que éste es uno.
[5] Como el dos multiplica y divide al mismo tiempo, se "cancela".

Realizando las operaciones indicadas y aplicando la propiedad fundamental de las proporciones:

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{1} = 3x^{\frac{1}{3}}$$

Expresando en términos de radical y sumando la constante de integración se tiene que:

$$\int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = 3\sqrt[3]{x} + C$$

En las integrales anteriores se aplicaron las reglas de manera directa. En estos casos se dice que la integral es inmediata. Sin embargo, no siempre sucede de esta forma. Observa el siguiente ejemplo:

Ejemplo 12 *Calcula la* $\int \sqrt{3t}\ dt$

Solución.

Observa que en las reglas básicas (tabla 4) no se encuentra alguna relacionada con raíces cuadradas. Sin embargo, de las leyes de los exponentes de la figura 7 inciso ii, puede reescribirse el integrando con potencias fraccionarias, como se muestra a continuación:

Reescribiendo la función, aplicando la ley de los exponentes (i):

$$\int \sqrt{3t}\ dt = \int (3t)^{\frac{1}{2}} dt$$

Asociando la nueva forma con la regla 5 e identificando los datos:

$$v = 3t; \quad dv = 3dt\,; \quad n = \frac{1}{2}$$

Según los datos, dv debe contener un 3, que no se aprecia en la integral original, pues solo se aprecia dt. Por lo tanto, completamos la integral[6], multiplicando dt por 3 y por $\frac{1}{3}$ la integral, es decir:

Completando la integral:

$$\frac{1}{3}\int (3t)^{\frac{1}{2}}\, 3dt$$

Aplicando la regla 5, con los datos mencionados:

$$\frac{1}{3}\int (3t)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{1}{3}\left[\frac{(3t)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]$$

Realizando las operaciones indicadas y aplicando la propiedad fundamental de las proporciones[7]:

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{(3t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{2(3t)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]$$

Realizando el producto de fracciones y expresando en radical[8]:

$$= \frac{2\sqrt{(3t)^3}}{9}$$

Por lo tanto:

$$\int \sqrt{3t}\ dt = \frac{2\sqrt{(3t)^3}}{9} + C$$

[6] Completar una integral implica que a dv, le falta un valor constante, por lo tanto, se procede a mantener dv en la estructura de la integral y multiplicar dicha integral por el reciproco del valor constante faltante (multiplicar y dividir por el mismo valor). Esto se conoce como completar la integral. Cabe señala que la integral solo se puede completar cuando el elemento que falta es un valor constante. Si faltase una variable, este proceso no puede aplicarse.

[7] También conocida como la "Ley del Sándwich".

[8] Aplicando de nueva cuenta la ley de los exponentes (sentido inverso) inciso ii de la figura 7.

Ejemplo 13 *Calcula* $\int \frac{x^3+4x-3}{x}\ dx$

Solución:

Como es evidente, ninguna de las fórmulas de la tabla 4 se asocia a la estructura de la integral, pero puede interpretarse el integrando como el cociente de un polinomio entre un monomio. Por lo tanto, se procede a realizar la división:

Aplicando la división[9]: $\int \frac{x^3+4x-3}{x}\ dx = \int \left(x^2 + 4 - \frac{3}{x}\right)\ dx$

La nueva forma de la integral se asocia a la regla 4, por lo tanto:

Aplicando la regla 4, con $du = x^2$; $dv = 4$; $dw = \frac{1}{x}$: $\int \left(x^2 + 4 - \frac{3}{x}\right)\ dx = \int x^2\, dx + \int 4dx - \int \frac{3}{x} dx$

Resolviendo la <u>primera integral</u> aplicando la regla 3 con $v = x$; $dv = x$; $n = 2$: $\int x^2\, dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + C$

Resolviendo la <u>segunda integral</u> aplicando la regla 3 con $a = 4$; $dv = dx$: $\int 4dx = 4\int dx$

Aplicando la regla 1 para la integral indicada: $= 4x + C$

Resolviendo la <u>tercera integral</u>, aplicando la regla con $a = 3$ y $v = \frac{dx}{x}$: $\int \frac{3}{x} dx = 3\int \frac{dx}{x}$

Aplicando la regla 6 para la integral indicada con $v = x$ y $dv = dx$: $= 3ln|x| + C$

Como se puede observar, en cada una de las integrales resueltas aparece una constante de integración, sin embargo, al sumarlas su valor siempre será constante, por lo que solo se considera una en el resultado final:

Conjuntado los resultados de cada integral, se tiene que: $\int \frac{x^3+4x-3}{x}\ dx = \frac{x^3}{3} + 4x - 3ln|x| + C$

Ejemplo 14 *Calcula* $\int \left(x^4 - 3x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5\right) dx$

Solución:

Reescribiendo el integrando, aplicando la ley B y A de los exponentes (figura 7) para el tercer término:

$$\int \left(x^4 - 3x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5\right) dx = \int \left(x^4 - 3x^{\frac{3}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}} + 5\right) dx$$

Aplicando la regla 4:

$$\int \left(x^4 - 3x^{\frac{3}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}} + 5\right) dx = \int x^4 dx - \int 3x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int 7x^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int 5dx$$

[9] Recuerda que la división de un polinomio entre un monomio, se realiza dividiendo cada término del polinomio entre el monomio y restando los exponentes para las literales; en caso de que dicha división no se puede realizar, ésta se indica como fracción.

Resolviendo la primera integral, aplicando la regla 3: $\int x^4\,dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5} + C$

Resolviendo la segunda integral aplicando la regla 3 y la regla 2 respectivamente: $-\int 3x^{\frac{3}{2}}\,dx = -3\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = -3\left[\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]$

Aplicando la ley fundamental de las proporciones $= -3\left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right] = -3\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5}\right)$

Aplicando la ley B de los exponentes: $-\int 3x^{\frac{3}{2}}\,dx = -\frac{6\sqrt{x^5}}{5} + C$

Resolviendo la tercera integral, aplicando la regla 3 y la regla 2 respectivamente: $\int 7x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 7\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 7\left[\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]$

Realizando las operaciones indicadas en el exponente y aplicando la ley fundamental de las proporciones: $= 7\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] = 7\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]$

Realizando el producto y aplicando la ley A y B de los exponentes: $\int 7x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 14\sqrt{x} + C$

Resolviendo la cuarta integral aplicando la regla 3 y 1 respectivamente: $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$

Conjuntado los resultados de cada integral[10], se tiene que:

$$\int\left(x^4 - 3x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5\right)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{6\sqrt{x^5}}{5} + 14\sqrt{x} + 5x + C$$

Puedes observar que en los ejemplos 13 y 14, cada resultado individual tiene una constante y que en el resultado final se escribe una sola constante, esto es porque la suma de varias constantes es igual a otra constante.

Aplicaciones de la integral indefinida: costo e ingreso marginal.

El costo marginal es un concepto usado en economía para referirse al costo que se asume al iniciar la producción de una unidad adicional de un artículo.

Matemáticamente se define como la derivada de la función del costo total con respecto a la cantidad de unidades. De forma inversa si se conoce el costo marginal, entonces es posible obtener la función de costo aplicando la integral indefinida, es decir: Si $C(x)$ es la función de costo entonces $c(x)$ es el costo marginal, por lo tanto:

$$C(x) = \int c(x)dx$$

[10] Las constantes de integración de cada integral individual, se representan como una única constante en el resultado final de la integral.

Donde $c(x)$ es el costo marginal y x es la cantidad de unidades de producción.

De la misma manera el ingreso marginal es el aumento del ingreso total cuando se vende una unidad más de producto. Matemáticamente, es la derivada de la función del ingreso total. Entonces, Si $I(x)$ es la función de costo entonces $i(x)$ es el costo marginal, por lo tanto:

$$I(x) = \int i(x)dx$$

Donde $i(x)$ es el costo marginal y x es la cantidad de unidades de producción.

Observa los siguientes ejemplos:

Ejemplo 15

El costo marginal de producir $\boldsymbol{x}$ número de artículos deportivos está determinado por $c(x) = 100 + 0.006x$.

Determina la función del costo, sabiendo que el costo de producir 1000 piezas es de $253 0000

Como el costo marginal es $c(x)$, entonces el costo $C(x)$ se determina como:	$C(x) = \int(100 + 0.006x)dx$
Resolviendo la integral:	$C(x) = \int 100\, dx + \int 0.006x\, dx$ $= 100 \int dx + 0.006 \int x\, dx$ $= 100x + 0.006\frac{x^2}{2}$
Por lo tanto, la función de costo está determinada por:	$C(x) = 100x + 0.003x^2 + C$

Como puedes ver para obtener la función de costo es necesario conocer la constante de integración. Para ello se consideran las siguientes condiciones: si $x = 1000$ entonces $C(1000) = 253000$.

Sustituyendo x en C(x):	$C(100) = 100(1000) + 0.003(1000)^2 + C$
Sustituyendo $C(100)$ y realizando las operaciones:	$253000 = 100000 + 0.003(1000000) + C$ $253000 = 100000 + 3000 + C$
Despejando C:	$C = 253000 - 100000 - 3000$ $C = 150000$
Por lo tanto, la función de costo es:	$C(x) = 100x + 0.003x^2 + 150000$

Solución b):

Sustituyendo $x = 2000$ (doble de piezas) en C(x):	$C(2000) = 100(2000) + 0.003(2000)^2 + 150000$
Realizando las operaciones:	$C(2000) = 200000 + 12000 + 150000$
Por lo tanto, el costo por producir el doble de piezas es:	$C(2000) = 362000$

Ejemplo 16

El ingreso marginal que determina un producto se obtiene con la función:

$$i(x) = 3000 - 0.5x$$

Donde x es la cantidad de un producto que se fabrica y se vende.
Sabiendo que el ingreso es cero cuando no se vende ningún producto, determinar la función del ingreso total. ¿Cuál será el costo de producir el doble de piezas?

Solución:

Como el ingreso marginal es i(x), entonces el ingreso $I(x)$ se determina como:

$$I(x) = \int (3000 - 0.5x)dx$$

Resolviendo la integral:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int 3000\, dx - \int 0.5x\, dx \\ &= 3000 \int dx - 0.5 \int x\, dx \\ &= 3000x - 0.5\frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función del ingreso está determinada por:

$$I(x) = 3000x - 0.25x^2 + C$$

Considerando las condiciones iniciales para determinar la constante de integración:

Si $x = 0$ entonces $I(x) = 0$

Sustituyendo los valores anteriores:

$$I(0) = 3000\ (0) - 0.25\ (0)^2 + C$$

Sustituyendo I(0) y realizando las operaciones:

$$0 = 0 - 0 + C$$

Despejando C:

$$C = 0$$

Por lo tanto, la función de Ingreso total es:

$$I(x) = 3000x - 0.25x^2$$

ACTIVIDAD 3

Con ayuda de las fórmulas para integración de funciones algebraicas de la tabla 4, resuelve las siguientes integrales indefinidas.

1) $\int 2\sqrt{x}\ \ dx$	*2)* $\int 5x(x+3)\ \ dx$
3) $\int \frac{(4x-5)(2x-7)}{3}\ \ dx$	*4)* $\int \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right)\ dx$
5) $\int \left(\frac{2x}{\sqrt[3]{x^2}} + 3x\right)\ dx$	*6)* $\int (5x-3)^2(2x-1)\ \ dx$
7) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)\ dx$	*8)* $\int (3x^3 + 6yx^2 - 12y + 5)\ \ dx$
9) $\int (3^3 - 3x^2)(3x)\ \ dx$	*10)* $\int \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - 4x\right)^2\ \ dx$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo C** y **Anexo E.**

Actividad 4. Integración de funciones trigonométricas

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Utiliza la definición de integral indefinida como herramienta para el cálculo del proceso inverso de la derivada, aplicado a la integral inmediata de una función, favoreciendo su pensamiento crítico y reflexivo.
- **Atributo (s):**
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Conocimiento (s):**
  - Integrales de funciones trigonométricas

Lectura previa: Regla básicas de integración para funciones trigonométricas.
La integración también se aplica a las funciones trigonométricas; para algunas de ellas, se obtiene fórmulas que pueden considerarse como básicas y que conviene agregar a nuestro formulario. Estas reglas se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 5 Reglas para integrar funciones trigonométricas

Reglas básicas de integración para funciones trigonométricas	
7. $\int senv\ dv = -\cos v + C$	8. $\int \cos v\ dv = senv + C$
9. $\int \tan v\ dv = -\ln\lvert\cos v\rvert + C$ $= \ln\lvert\sec v\rvert + C$	10. $\int \cot v\ dv = \ln\lvert sen\ v\rvert + C$ $= -\ln\ \lvert\csc v\rvert + C$
11. $\int \sec v\, dv = \ln\ \lvert\sec v + \tan v\rvert + C$	12. $\int \csc v\, dv = \ln\ (\csc v - \cot v) + C$ $= \ln\left\lvert\tan\frac{v}{2}\right\rvert + C$
13. $\int \sec^2 v\ dv = \tan v + C$	14. $\int \csc^2 v\ dv = -\cot v + C$
15. $\int \sec v \tan v\, dv = \sec v + C$	16. $\int \csc v \cot v\, dv = -\csc v + C$

Para la aplicación de las reglas anteriores se sugiere la siguiente estrategia:

1. Identifica v y calcula dv, aplicando la definición del diferencial.
2. Verifica que dv aparezca en la integral de acuerdo a lo calculado.
3. Si dv aparece completa, aplica de inmediato la regla correspondiente.
4. Si a dv le falta un valor constante, procede a completar la función, con el reciproco de dicho valor y aplica la regla correspondiente.
5. Si la integral no se ajusta inmediatamente a las reglas básicas, será necesario reescribir la integral aplicando las leyes de los exponentes, realizando algunas operaciones previas o utilizando las identidades trigonométricas.

En este último caso serán útiles las siguientes identidades.

Tabla 6. Identidades Básicas

Recíprocas		Relación entre seno, coseno y tangente
1. $sen\,\alpha \csc\alpha = 1$	2. $sen\,\alpha = \frac{1}{\csc\alpha}$ 3. $sec\,\alpha = \frac{1}{sen\,\alpha}$	4. $\tan\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$
5. $\cos\alpha \sec\alpha = 1$	6. $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$ 7. $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$	8. $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}$
9. $\tan\alpha \cot\alpha = 1$	10. $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha}$ 11. $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$	
Pitagóricas		**Del ángulo doble**
12. $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$	13. $sen^2\alpha = 1 - cos^2\alpha$ 14. $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$	15. $sen\ 2\alpha = 2sen\ \alpha \cos\alpha$
16. $1 + tan^2\alpha = sec^2\alpha$	17. $tan^2\alpha = sec^2\alpha - 1$ 18. $sec^2\alpha - tan^2\alpha = 1$	19. $\cos 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha$
20. $1 + cot^2\alpha = csc^2\alpha$	21. $cot^2\alpha = csc^2\alpha - 1$ 22. $csc^2\alpha - cot^2\alpha = 1$	23. $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - tan^2\ \alpha}$

Con base a lo anterior observa y analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 17 *Calcula* $\int sen\ ax\ dx$

Solución

Identificando[11] v y calculando[12] dv: $v = ax \quad ; \ dv = adx$

Completando la integral[13]: $\int sen\ ax\ dx = \frac{1}{a}\int sen\ ax\ dx$

Aplicando la regla 7: $= \frac{1}{a}(-\cos ax)$

[11] En las funciones trigonométricas v es el ángulo. En ocasiones puede ser una variable y en otra su forma es de una función.
[12] dv es la derivada de v multiplicada por la diferencial de la variable, generalmente dx.
[13] Como falta el valor constante a, se multiplica la integral por su recíproco $\frac{1}{a}$.

Realizando las operaciones, se obtiene que: $\int sen\, ax\, dx = \frac{1}{a}\cos ax + C$

Ejemplo 18 *Calcula la* $\int cos\ \frac{x}{2}\ dx$

Solución

Identificando v y calculando dv: $v = \frac{x}{2}\ ;\ dv = \frac{1}{2}dx$

Completando la integral: $$\int cos\ \frac{x}{2}\ dx = 2\int cos\ \frac{x}{2}\cdot\ \frac{1}{2}dx$$

Aplicando la regla 8 de integración, se obtiene que: $$\int cos\ \frac{x}{2}\ dx = 2sen\ \frac{x}{2} + C$$

Ejemplo 19 *Calcular* $\int \frac{d\theta}{cos^2\,\theta}$

Solución:

Por la forma de la integral se puede notar que no se relaciona directamente con algunas de las reglas de la tabla 4. Sin embargo, se puede transformar usando las identidades como se expone a continuación:

Reescribiendo la función para facilitar la identificación de la identidad: $$\int \frac{d\theta}{cos^2\,\theta} = \int \frac{1}{cos^2\,\theta}d\theta = \int \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2 d\theta$$

Aplicando la identidad 7 de la tabla 6: $$\int \frac{d\theta}{cos^2\,\theta} = \int (\sec\theta)^2 d\theta = \int sec^2\theta\ d\theta$$

Identificando v y calculando dv de la nueva forma de integral: $v = \theta\ \ ;\ dv = d\theta$

Como la integral está completa aplicamos la regla 13 de integración, obteniendo: $$\int \frac{d\theta}{cos^2\,\theta} = \tan\theta + C$$

Ejemplo 20 *Calcular* $\int (tan\,x + sec\,x)^2\ dx$

Solución:

En el ejemplo propuesto, es evidente que no corresponde a ninguna regla de la tabla 4. Sin embargo, por la forma de la función se puede observar que es un binomio al cuadrado, por lo que la integral se puede reescribir desarrollando dicho binomio como se muestra a continuación.

$$\int (tan\,x + sec\,x)^2\ dx = \int (tan^2\,x + 2\,tan\,x\,sec\,x + sec^2\,x)\,dx$$

Aplicando la regla 4 de integración de la tabla 4:

$$\int (\tan x + \sec x)^2\, dx = \int \tan^2 x\, dx + \int 2 \tan x \sec x\, dx + \int \sec^2 dx$$

Resolviendo cada integral:

Primera integral $\int \tan^2 x\, dx$

Como no hay regla de integración directa se aplica la identidad 17 de la tabla 5. $\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx$

Separando la integral, con la regla 4 de integración (tabla 4): $\int \tan^2 x\, dx = \int \sec^2 x\, dx - \int dx$

Identificando v y calculando dv: $v = x \;\; ; \; dv = dx$

Como la integral está completa se aplica la regla 13 y la regla 1 de la tabla 4 respectivamente: $\int \tan^2 x\, dx = \tan x - x + C$

Segunda integral $\int 2 \tan x \sec x\, dx$

Aplicando la regla 3 de integración: $\int 2 \tan x \sec x\, dx = 2 \int \tan x \sec x\, dx$

Identificando v y calculando dv: $v = x \;\; ; \; dv = dx$

Como la integral está completa se aplica la regla 15 de integración: $\int 2 \tan x \sec x\, dx = 2 \sec x + C$

Tercera integral $\int \sec^2 dx$

Identificando v y calculando dv: $v = x \;\; ; \; dv = dx$

Como la integral está completa se aplica la regla 13 de integración: $\int \sec^2 dx = \tan x + C$

Unificando los resultados de las integrales:

$$\int (\tan x + \sec x)^2\, dx = \tan x - x + 2 \sec x + \tan x$$

Reduciendo términos semejantes y reordenando: $\int (\tan x + \sec x)^2\, dx = 2 \tan x + 2 \sec x - x + C$

Factorizando los dos primeros términos, finalmente se obtiene: $\int (\tan x + \sec x)^2\, dx = 2(\tan x + \sec x) - x + C$

Ejemplo 21 *Calcula* $\int \csc \frac{2}{3} x \;\; \cot \frac{2}{3} x\, dx$

Solución:

Por la estructura de la función se puede asociar a la regla 16 de la tabla 5. Por lo tanto:

Identificando v y calculando dv: $v = \frac{2}{3} x \;\; ; \; dv = \frac{2}{3} dx$

Completando la integral: $\int csc\frac{2}{3}x\ \ cot\frac{2}{3}x\,dx = \frac{3}{2}\int csc\frac{2}{3}x\ \ cot\frac{2}{3}x\frac{2}{3}dx$

Aplicando la regla 16 de integración: $\int csc\frac{2}{3}x\ \ cot\frac{2}{3}x\,dx = \frac{3}{2}\left(-\csc\frac{2}{3}x\right)$

Realizando la operación indicada se obtiene que: $\int csc\frac{2}{3}x\ \ cot\frac{2}{3}x\,dx = -\frac{3}{2}\ \csc\frac{2}{3}x + C$

Ejemplo 22 *Calcula la* $\int e^x\,tan\,e^x\,dx$

Solución:
Aunque la integral parece un producto de funciones, procedemos a revisar el factor que corresponde a la función trigonométrica, por lo tanto:

Identificando v y calculando dv: $v = e^x\ \ ;\ dv = e^x dx$

Como la integral está completa, aplicamos la regla 9 de integración: $\int e^x\,tan\,e^x\,dx = -\,ln\,cos\,e^x + C$

Ejemplo 23 *Calcula* $\int \frac{sen\ \theta + cos\ \theta}{sen\ \theta}\ d\theta$

Solución:
Como es evidente, la estructura de la función no se asocia directamente con alguna de las reglas de la tabla 5. Sin embargo, se puede observar que puede realizarse la división, como se muestra a continuación.

Realizando la división: $\int \frac{sen\ \theta+cos\ \theta}{sen\ \theta}\ d\theta = \int\left(1 + \frac{\cos\theta}{sen\ \theta}\right)d\theta$

Aplicando la regla 4 de integración. $= \int d\theta + \int\frac{\cos\theta}{sen\ \theta}d\theta$

Resolviendo la primera integral con la regla 1 de la tabla 4 y aplicando la identidad 8 de la tabla 6. $= \theta + \int \cot\theta\,d\theta$

Resolviendo la segunda integral con la regla 10 de integración de la tabla 5, con $v = \theta$ y $dv = d\theta$: $\int \frac{sen\ \theta + cos\ \ \theta}{sen\ \theta}\ d\theta = \theta + \ln|sen\ \theta| + C$

Ejemplo 24 *Calcula* $\int sec\,ax\,dx$

Solución:
La estructura de la función se asocia a la regla 11 de la tabla 5. Por lo tanto:

Identificando v y calculando dv: $v = ax\ \ ;\ dv = a\,dx$

Completando la integral multiplicando por a y su recíproco: $\int sec\,ax\,dx = \frac{1}{a}\int sec\,ax\,a\,dx$

Aplicando la regla 11 de integración, se obtiene finalmente que:

$$\int sec\, ax\, dx = \frac{1}{a}\ln|\sec ax + \tan ax| + C$$

Ejemplo 25 *Calcula* $-\int csc\frac{x}{a}dx$

Solución:

La forma de la función se asocia a la regla 12 de la tabla 5. Por lo tanto:

Identificando v y calculando dv:

$$v = \frac{x}{a}\ ;\ dv = \frac{1}{a}\, dx$$

Completando la integral multiplicando por $\frac{1}{a}$ y la integral por su recíproco:

$$-\int csc\frac{x}{a}dx = -a\int csc\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}dx$$

Aplicando la regla 12 de integración, se obtiene finalmente que:

$$-\int csc\frac{x}{a}dx = a\ln\left|csc\frac{x}{a} - cot\frac{x}{a}\right| + C$$

ACTIVIDAD 4 *Con ayuda de las fórmulas para integración de funciones trigonométricas de la tabla 5, resuelve las siguientes integrales indefinidas.*

1. $\int cos\, 5x\, dx$	2. $\int tan\, ax\, dx$
3. $\int csc^2\, 5\, x\, dx$	4. $\int xsenx\, dx$
5. $\int 4senx\, dx$	6. $\int(senx + senx\, cos^2\, x)\, dx$
7. $\int 5\csc x \tan x\, dx$	8. $\int \frac{cos\, x}{sen^2 x}\ dx$
9. $\int(5\, tan^2\, x - 4\, cot^2\, x)\ \ dx$	10. $\int(3x^2 - 5sen\ x)\ \ dx$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo C** y **Anexo E.**

Actividad 5. Integración de funciones exponenciales

- **Aprendizaje Esperado:**

  - Aplica las integrales inmediatas para la solución de situaciones reales y/o hipotéticas de su entorno relacionadas con funciones algebraicas, trigonométricas y exponenciales que favorezcan su creatividad y pensamiento crítico.

- **Atributo (s):**
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

- **Conocimiento (s):**
  - Definición de la integral indefinida.
  - Integrales de funciones: Algebraicas, Trigonométricas y Exponenciales.

Lectura previa: Reglas básicas de integración para funciones exponenciales.
La función exponencial es quizás la función más eficiente en términos de las operaciones de cálculo. Curiosamente para la función exponencial $f(x) = e^x$, tanto su derivada como su integral sigue siendo la misma.

$$\boldsymbol{f(x) = e^x}$$

$$\boldsymbol{f'(x) = e^x}$$

$$\boldsymbol{\int e^x\, dx = e^x}$$

Para integrar funciones exponenciales se utilizan las siguientes fórmulas:

Tabla 7. Reglas para integrar funciones exponenciales

Función exponencial con base a[14]	Función exponencial natural
17. $\int \boldsymbol{a^v\ \ dv = \frac{a^v}{\ln a} + C}$	18. $\int e^v\ \ dv = e^v + C$

La estrategia para aplicar las reglas anteriores implica identificar v y determinar dv; si la integral es completa se aplica la regla correspondiente, de lo contrario se procede a completar multiplicando el diferencial de la variable por la faltante y la integral por su respectivo recíproco. Observa los siguientes ejemplos:

Ejemplo 26 *Calcula* $\int 5^{2y} dy$

Solución:
Como la base es $a = 5$, la forma de la función se asocia con la regla 17, por lo tanto:

Identificando v y calculando dv: $v = 2y\ ;\ dv = 2\,dy$

Completando la integral multiplicando por 2 el diferencial y la integral por su recíproco:

$$\int 5^{2y} dy = \frac{1}{2}\int 5^{2y} \cdot 2dy$$

[14] Recuerda que a es mayor cero y diferente de 1.

Aplicando la regla 17 de la tabla 7, se obtiene finalmente que:

$$\int 5^{2y}dy = \frac{1}{2}\left(\frac{5^{2y}}{\ln 5}\right) + C$$

Ejemplo 27 *Calcula* $\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt$

Solución:
La forma de la función se relaciona con la regla 18. Por lo tanto:

Identificando v y calculando dv[15]:

$$v = \sqrt{t}\ ;\ dv = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dy$$

Como al diferencial le falta el 2, procedemos a completar la integral, por lo que:

$$\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = 2\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}dt$$

Aplicando la regla 18 de la tabla 7, se obtiene finalmente que:

$$\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = 2e^{\sqrt{t}} + C$$

Ejemplo 28 Las esporas de un cultivo tienen un crecimiento marginal indicado por:

$$M(t) = 8e^{2t}$$

donde t es el tiempo en semanas. Sabiendo que cuando $t = 0$ (al inicio del experimento) la capa contenía 4000 esporas, ¿Cuál es la función que determina el crecimiento? ¿Cuántas esporas se espera que haya al iniciar la semana 10?

Solución:

Considerando que la función de crecimiento $C(t)$ es la integral de la función de crecimiento marginal, entonces:

$$C(t) = \int M(t)\ dt$$

Por lo tanto:

Determinando $C(t)$ como:

$$C(t) = \int 8e^{2t}\ dt$$

Separando la constante y completando la integral a partir de $v = 2t$ y $dv = 2$, se tiene que:

$$C(t) = \frac{8}{2}\int e^{2t}\,2dt$$

Resolviendo la integral:

$$C(t) = 4e^{2t} + C$$

Determinando la constante de integración sustituyendo las condiciones iniciales $t = 0\ y\ C(0) = 4000$ en la integral y realizando las operaciones correspondientes:

$$\begin{gathered} 4000 = 4e^{2(0)} + C \\ 4000 = 4e^{0} + C \\ 4000 = 4(1) + C \\ 4000 = 4 + C \\ c = 4000 - 4 = 3996 \end{gathered}$$

[15] En este caso para obtener la derivada de la variable se aplica la regla de derivación $\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$. Realizando las adecuaciones algebraicas correspondientes, se obtiene el diferencial mencionado en el ejemplo.

Por lo tanto, la función de crecimiento es:

$$C(t) = 4e^{2t} + 3996$$

La semana 10 implica que $t = 10$. Sustituyendo en la función de crecimiento y realizando las operaciones:

$$\begin{aligned} C(10) &= 4e^{2(10)} + 3996 \\ &= 4e^{20} + 3996 \\ &= 4(485165195.4) + 3996 \\ C(10) &= 1940664778 \end{aligned}$$

Por lo tanto, a las 10 semanas habrá 1940664778 esporas.

Ejemplo 29

Suponga que la tasa de crecimiento de bacterias en una placa de Petri viene dada por $q(t) = 3^t$, donde t se mide en horas y que $q(t)$ en miles de bacterias por hora. Si un cultivo comienza con 10000 bacterias. Encuentre la función $Q(t)$ que proporcione el número de bacterias en la placa de Petri en cualquier momento t. ¿Cuántas bacterias habrá en el plato después de 2 horas?

Solución:

Como Q(t) es la función primitiva de q(t) entonces:

$$Q(t) = \int q(t)\, dt$$

Por lo tanto:

Determinando $Q(t)$ como:

$$Q(t) = \int 3^t \ dt$$

Resolviendo la integral con $v = t$ y $dv = dt$ con la regla 24:

$$Q(t) = \frac{3^t}{\ln 3} + C$$

Determinando la constante de integración sustituyendo las condiciones iniciales $t = 0\ y\ Q(0) = 10$ en la integral y realizando las operaciones correspondientes:

$$10 = \frac{3^0}{\ln 3} + C$$

$$10 = \frac{1}{\ln 3} + C$$

Despejando C:

$$C = 10 - \frac{1}{\ln 3} = 9.08$$

Por lo tanto, la función de crecimiento es:

$$Q(t) = \frac{3^t}{\ln 3} + 9.08$$

A las dos horas significa que $t = 2$. Sustituyendo en la función de crecimiento y realizando las operaciones:

$$Q(2) = \frac{3^2}{\ln 3} + 9.08$$

$$Q(2) = 8.19 + 9.08 = 17.27$$

Por lo tanto, a las 2 horas habrá aproximadamente 18 bacterias.

ACTIVIDAD 5

Con ayuda de las fórmulas para la integración de funciones exponenciales de la tabla 7, resuelve las siguientes integrales indefinidas.

1. $\int 2.5^x \ dx$	2. $\int 4\ (5^x)\ dx$
3. $\int \frac{5e^x}{3e^x}\ dx$	4. $\int (e^x + e^{-x})^2\ dx$
5. $\int a^\theta e^\theta\ d\theta$	6. $\int 3e^{sen\ 2x} \cos 2x\, dx$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo D** y **Anexo E.**

BLOQUE III. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

Actividad 6. Integración por sustitución o cambio de variable.

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Usa el método de cambio de variable para resolver integrales de funciones algebraicas y trascendentes, promoviendo el desarrollo de su creatividad en situaciones de su entorno.
- **Atributo (s):**
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Conocimiento (s):**
  - Sustitución o cambio de variable.

Lectura previa: Métodos de integración: Sustitución o cambio de variable.

Cuando una integral no se ajusta de manera inmediata a las reglas de integración conocidas, es necesario adecuarla a través ciertos procedimientos, con la finalidad de transformarla y usar la regla correspondiente. En los casos simples, basta con completar la integral como hasta ahora se ha visto. Sin embargo, para integrales de mayor complejidad son útiles los llamados métodos de integración. Los métodos más comunes son:

- Sustitución o cambio de variable.
- Integración por partes.
- Descomposición en fracciones parciales.

Mediante estos métodos de integración lo que se busca es identificar algún proceso que permita reducir la integral a un ejercicio más simple, es decir, se trata de obtener una integral en la cual se puedan utilizar las fórmulas ya vistas y posibilite encontrar la solución de manera directa. Como se expone a continuación.

Integración por cambio de variable

El cambio de variable o sustitución consiste en expresar la integral en términos de una nueva variable, generalmente u y du, de tal manera que resulte en una expresión más sencilla que se ajuste a una de las reglas básicas de integración. Este método es útil para integrar expresiones de funciones compuestas (polinomios elevados a una potencia o contenida en radicales) o funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

Generalmente, una vez realizado el cambio de variable si la integral resultante, tiene la forma:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$$

Que puede resolverse a través de la regla general de las potencias o remitirse a la regla de integración correspondiente.

Para aplicar el método de cambio de variable se sugiere el procedimiento siguiente:

1.	Identificar[16] $\boldsymbol{u}$
2.	Calcular $\boldsymbol{du}$ y despejar $\boldsymbol{dx}$. Esto puede aplicar en algunos casos.
3.	Realizar el cambio de variable sustituyendo $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{du}$ en la integral original.
4.	Resolver en términos de $\boldsymbol{u}$ la integral, aplicando la regla de integración correspondiente.
5.	Expresar la solución en términos de la variable original.

Observa los siguientes ejemplos:

Ejemplo 30 Resolver $\int sen\ 5x dx$

Solución

Como se trata de una función trigonométrica, u es el ángulo, por lo tanto:

Identificando u:	$u = 5x$
Calculando du:	$du = 5dx$
Despejando dx:	$dx = \frac{du}{5}$
Realizando el cambio de variable, sustituyendo los datos anteriores:	$\int sen\ 5xdx = \int sen\ u\ \frac{du}{5}$
Resolviendo la integral, "sacando el valor constante" y aplicando la regla 7 de integración:	$\int sen\ u\ \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int sen\ u\ du$
	$= \frac{1}{5}(-\cos u) + C$
Expresando la solución en términos de la variable original[17]:	$= -\frac{1}{5}\cos 5x + C$
Por lo tanto:	$\int sen\ 5xdx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

[16] En una función algebraica, u es el polinomio que se eleva a la potencia o que está contenido en un radical.
En una función trigonométrica, u es el ángulo.
En una función exponencial, u es el exponente.
[17] Sustituyendo los datos iniciales en la solución.

Ejemplo 31 Resolver $\int xe^{(5x^2+5)}\ dx$

Solución:
Como se trata de una función exponencial, u es el exponente; aplicando el cambio de variable se tiene que:

Identificando u:	$u = 5x^2 + 5$
Calculando du:	$du = 10x\ dx$
Despejando dx:	$dx = \frac{du}{10x}$
Realizando el cambio de variable, sustituyendo los datos anteriores[18]:	$\int xe^{(5x^2+5)}\ dx = \int x\ e^u \frac{du}{10x} = \int e^u \frac{du}{10}$
Resolviendo la integral en términos de u, aplicando la regla 25 de integración:	$\int e^u \frac{du}{10} = \frac{1}{10}\int e^u\ du$
	$= \frac{1}{10} e^u + C$
Expresando la solución en términos de la variable original:	$= \frac{1}{10} e^{(5x^2+5)} + C$
Por lo tanto:	$\int xe^{(5x^2+5)}\ dx = \frac{1}{10} e^{(5x^2+5)} + C$

Ejemplo 32 Resolver $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$

Solución:
Como tenemos un polinomio dentro de un radical, podemos asignar a éste como u. Por lo que:

Identificando u:	$u = x^2 + 2x + 3$
Calculando[19] du:	$du = (2x + 2)dx = 2(x + 1)dx$
Despejando dx:	$dx = \frac{du}{2(x+1)}$
Realizando el cambio de variable, sustituyendo los datos anteriores y cancelando el factor $x + 1$:	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2(x+1)} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}$
Resolviendo la integral en términos de u, aplicando la regla 2 de integración[20]:	$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}\ du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}} du$

[18] Nota que en este paso se "eliminan las x"
[19] En este caso fue necesario factorizar du, aplicando la factorización por término común.
[20] Nota que en este caso fue necesario adecuar la forma de la integral usando las leyes de los exponentes, i e ii auxiliares antes de la aplicación de la regla mencionada.

"Cancelando" $\frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} + C$

Expresando la solución en términos de la variable original: $= (x^2 + 2x + 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C$

Por lo tanto: $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + C$

Ejemplo 33 *Resolver* $\int x\sqrt{2x + 1}dx$

Solución:
Por la forma de la integral, escogemos u al polinomio que está contenido en el radical, por lo tanto:

Identificando u: $u = 2x + 1$

Calculando du: $du = 2dx$

Despejando dx: $dx = \frac{du}{2}$

Realizando el cambio de variable, sustituyendo los datos anteriores: $$\int x\sqrt{2x+1}\,dx = \int x\,\sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int x\,u^{\frac{1}{2}}\,du$$

Nota que en este caso al realizar el cambio de variable aún sigue quedando la variable original, por lo tanto, es necesario encontrar la manera en que ya no aparezca. Esta situación lo resolvemos de la siguiente forma:

De la identificación de la u, despejamos x: $x = \frac{u-1}{2}$

Retomando el cambio de variable sustituyendo x, tenemos que: $\frac{1}{2}\int x\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}}\,du$

Realizando las operaciones indicadas: $= \frac{1}{4}\int (u-1)\,u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{4}\int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du$

Separando las integrales: $= \frac{1}{4}\left[\int u^{\frac{3}{2}}\,du - \int u^{\frac{1}{2}}\,du\right]$

Resolviendo la primera integral en términos de u, aplicando la regla 2 de integración: $\int u^{\frac{3}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5}$

Resolviendo la segunda integral en términos de u, aplicando la regla 2 de integración: $\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}$

Unificando los resultados $\frac{1}{4}\left[\int u^{\frac{3}{2}}\,du - \int u^{\frac{1}{2}}\,du\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}\right]$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando: $=\frac{2u^{5/2}}{20}-\frac{2u^{3/2}}{12}=\frac{u^{5/2}}{10}-\frac{u^{3/2}}{6}$

Expresando como radicales las potencias fraccionarias: $=\frac{\sqrt{u^5}}{10}-\frac{\sqrt{u^3}}{6}+C$

Expresando la solución en términos de la variable original: $=\frac{\sqrt{(2x+1)^5}}{10}-\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6}+C$

Por lo tanto: $\int x\sqrt{2x+1}dx=\frac{\sqrt{(2x+1)^5}}{10}-\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{6}+C$

Ejemplo 34 *Resolver* $\int sen^2 3x\cos 3x\, dx$

Solución:
La expresión $sen^2 3x$ de la integral, puede expresarse como $(sen\ 3x)^2$; por lo tanto, la integral se puede reescribir como:

$$\int sen^2 3x\cos 3x\, dx=\int (sen\ 3x)^2\cos 3x\, dx$$

Identificando u: $u=sen\ 3x$

Calculando du: $du=\cos 3x\cdot 3=3\cos 3x\, dx$

Despejando dx: $dx=\frac{du}{3\cos 3x}$

Realizando el cambio de variable, sustituyendo los datos anteriores[21]: $\int sen^2\ 3x\cos 3x\, dx=\int u^2\frac{du}{3}$

Resolviendo la integral en términos de u, aplicando la regla 5 de integración: $\frac{1}{3}\int u^2du=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^3}{3}=\frac{u^3}{9}+C$

Expresando la solución en términos de la variable original: $=\frac{sen^3 3x}{9}+C$

Por lo tanto: $\int sen^2\ 3x\cos 3x\, dx=\frac{sen^3 3x}{9}+C$

[21] Nota que en este paso se "eliminan las x"

ACTIVIDAD 6 *Aplica el método de sustitución o cambio de variable para resolver las siguientes integrales*

1. $\int \sqrt{1-4x}\,dx$	2. $\int x\sqrt{1-2x}\,dx$
3. $\int x^2(x^3-1)^{10}\,dx$	4. $\int (x^2-4x+4)^{4/3}\,dx$
5. $\int cos4xdx$	6. $\int 2senx\,\sqrt[3]{1+cosx}dx$
7. $\int cosx\,(2senx)^5$	8. $\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\cdot\frac{dx}{3x^2}$
9. $\int x^2\,tan\,x^3\,dx$	10. $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{4x^2-32x-1}}$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo F**.

Actividad 7. Integración por partes.

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Usa el método de la integración por partes para resolver integrales que involucran producto de funciones, promoviendo el desarrollo de su creatividad en situaciones de su entorno.
- **Atributo (s):**
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Conocimiento (s):**
  - Método de integración: Integración por partes

Lectura previa: Métodos de integración: Integración por partes.

El método de integración por partes se basa en la fórmula de la derivada de un producto. Es decir, si:

$$\frac{d}{dx}[uv] = u\,dv + v\,du$$

Haciendo el proceso inverso y en notación de integral indefinida se tiene que:

$$\int (u\,dv + v\,du)dx = uv \quad \text{ó} \quad \int u\,dv + \int v\,du = uv$$

Arreglando la ecuación se tiene que:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Esta expresión se conoce como la fórmula de la integración por partes.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

un día vi una vaca vestida de uniforme

Figura 7. Nemotecnia para recordar la fórmula de la integración partes.

La integración por partes es útil para integrales que contienen productos que involucran potencias, funciones exponenciales, funciones trigonométricas, logarítmicas y funciones inversas.

El éxito de su aplicación depende de la elección apropiada de u y dv, haciendo las siguientes consideraciones:

- Tomar como dv la parte más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
- Tomar como u la parte del integrando cuya derivada sea una función más simple que u y como dv el factor restante del integrando.

Algunos criterios de aplicación se muestran en la tabla siguiente:

Tabla 8. Criterios para asignar u y dv para algunas integrales comunes

Caso	Forma del integrando	Asignación sugerida	
		u	dv
I.	A. $\int x^n e^{ax} dx$	x^n	$e^{ax} dx$
	B. $\int x^n sen\ bx\ dx$		$sen\ bx\ dx$
	C. $\int x^n \cos bx\ dx$		$\cos bx\ dx$
II.	A. $\int x^n lnx\ dx$	lnx	$x^n dx$
	B. $\int x^n arcsen\ bx\ dx$	$arcsen\ bx$	
	C. $\int x^n \arctan bx\ dx$	$arctan\ bx$	
III.	A. $\int x^n e^{ax} dx$	x^n	$e^{ax} dx$
	B. $\int x^n sen\ bx\ dx$		$sen\ bx\ dx$
	C. $\int x^n \cos bx\ dx$		$\cos bx\ dx$
IV.	A. $\int lnx\ dx$	lnx	dx
	B. $\int arcsen\ bx\ dx$	$arcsen\ bx$	
	C. $\int \arctan bx\ dx$	$arctan\ bx$	

Analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 35 *Resolver la siguiente integral usando integración por partes:* $\int 3x\ sen\ 2x\ dx$

Solución:

De la forma de la integral, se puede aprecia que su forma se parece al caso IB de la tabla 8. Con base a lo anterior, se procede como sigue:

Asignando u y dv (caso IB) $\quad u = 3x \quad dv = sen\ 2x\ dx$

Diferenciando u e integrando[22] dv $\quad du = 3dx$

$$v = \int sen\ 2x\ dx$$

$$v = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

[22] Se aplica la regla 7 de integración.

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:	$\int 3x\, sen2x\, dx = (3x)\left(-\frac{1}{2}\cos 2\,x\right) - \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2\,x\right)(3\ dx)$
Realizando las operaciones indicadas:	$= -\frac{3}{2}x\cos 2\,x + \frac{3}{2}\int \cos 2\,x\ dx$
Resolviendo la integral indicada, aplicando la regla 8 integración[23]:	$= -\frac{3}{2}x\cos 2\,x + \frac{3}{2}\left(\frac{sen2x}{2}\right) + C$
Realizando las operaciones indicadas se obtiene que:	$\int 3x\, sen2x\, dx == -\frac{3}{2}x\cos 2\,x + \frac{3}{4}sen2x + C$

Ejemplo 36 *Resolver la siguiente integral usando integración por partes:* $\int x^2 e^{5x} dx$

Solución:
Por la estructura de la integral, observamos que se puede asociar con el Caso IA de la tabla 8. Por lo tanto:

Asignando u y dv (caso IA)	$u = x^2$	$dv = e^{5x}dx$
Diferenciando u e integrando dv	$du = 2x\, dx$	$v = \int e^{5x}dx$ $v = \frac{1}{5}\ e^{5x}$
Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:	$\int x^2 e^{5x}dx = (x^2)\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right) - \int\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)(2xdx)$	
Realizando las operaciones indicadas:	$= \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}\, dx$	

Podemos notar que la integral resultante de la parte que corresponde a $\int vdu$, es decir, $\int xe^{5x}\, dx$ no se puede resolver directamente con algunas de las fórmulas conocidas; sin embargo, también se puede observar que su forma corresponde al Caso IA de la tabla 8. Por lo tanto, debe aplicarse la integración por partes de nueva cuenta para obtener su solución, como se muestra a continuación:

Asignando u y dv (caso IA)	$u = x$	$dv = e^{5x}dx$
Diferenciando u e integrando dv	$du = dx$	$v = \int e^{5x}dx$ $v = \frac{1}{5}\ e^{5x}$
Sustituyendo en la fórmula de integración por partes:	$\int xe^{5x}dx = (x)\left[\frac{1}{5}e^{5x}\right] - \int \frac{1}{5}e^{5x}\, dx$	
Realizando las operaciones indicadas:	$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\int e^{5x}\, dx$	
Resolviendo la integral resultante con la regla 18 y realizando las operaciones indicadas:	$= \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)$ $\int xe^{5x}\, dx = \frac{1}{5}xe^{5x} - \frac{1}{25}e^{5x}$	
Retomando la estructura de la integral original, a partir de la primera aplicación de la integración por partes:	$\int x^2e^{5x}dx = \frac{1}{5}x^2e^{5x} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}\, dx$	

[23] En este paso debe completarse previamente la integral antes de aplicar la regla 8 de integración.

Sustituyendo la solución de la integral resultante:	$=\frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{5}\left[\frac{1}{5}xe^{5x}-\frac{1}{25}e^{5x}\right]$
Realizando las operaciones indicadas:	$=\frac{1}{5}x^2e^{5x}-\frac{2}{25}xe^{5x}+\frac{2}{125}e^{5x}$
Factorizando, finalmente resulta que:	$\int x^2e^{5x}dx=\frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{2}{25}\right)+C$

Ejemplo 37 *Resolver la siguiente integral usando integración por partes:* $\int arcsenx\, dx$

Solución:

La estructura de la integral se asocia a la forma del Caso IVB de la tabla 8. Con base a lo anterior realizamos las asignaciones sugeridas como:

Asignando u y dv (Caso IVB)	$u=arcsenx$	$dv=dx$
Diferenciando u e integrando dv	$du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$v=\int dx$ $v=x$
Sustituyendo en la fórmula de integración partes:	$\int arcsenx\, dx=x\, arcsenx-\int x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	
Realizando las operaciones indicadas:	$=x\, arcsenx-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$	
Reescribiendo la integral indicada:	$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int x(1-x^2)^{-1/2}\,dx$	
Completando la integral indicada y resolviendo[24]:	$=\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-1/2}(-2x)dx$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-x^2)^{1/2}}{\frac{1}{2}}=-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$	
Por lo tanto, el resultado de la integral indicada es:	$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}$	
Retomando la integral inicial y sustituyendo la solución de la integral indicada, se tiene finalmente que:	$\int arcsenxdx=x\, arcsenx-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)+C$	

ACTIVIDAD 7 *Aplica el método de integración por partes para resolver las siguientes integrales*

1. $\int x\ e^{3x}\,dx$	2. $\int x^5e^x\,dx$
3. $\int 3x\ sen\ 5x\ \ dx$	4. $\int \arccos x\,dx$
5. $\int e^x\cos 2x\,dx$	6. $\int \ln 3x\,dx$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo F.**

[24] En este caso, se aplicó la regla 5 de integración de la tabla 4.

Actividad 8. Integración por fracciones parciales.

➢ **Aprendizaje Esperado:**

- Usa el método de la integración por fracciones parciales para resolver integrales que involucran cociente de funciones, promoviendo el desarrollo de su creatividad en situaciones de su entorno.

➢ **Atributo (s):**

- Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

➢ **Conocimiento (s):**

- Método de integración: Integración por fracciones parciales.

Lectura previa: Métodos de integración: Fracciones parciales.

Función racional impropia

- $f(x) = \frac{x^5+2x^3-x+1}{x^3+5x}$

Función racional propia

- $f(x) = \frac{2x+2}{x^2-4x+8}$

Figura 8. Tipos de funciones racionales, según el grado del polinomio que los conforman.

Una función racional es un cociente de funciones de la forma: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, donde $q(x) \neq 0$. Si el grado del polinomio del denominador es menor que el grado del polinomio del denominador, la función racional se llama impropia; si ocurre lo contrario recibe el nombre de función racional propia, como se muestra en la figura 8.

Para integrar funciones racionales impropias, basta con realizar la división algebraica e integrar el cociente obtenido. Como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 38 *Resolver la integral:* $\int \frac{x^5+x^3-20x}{x+2}dx$

Solución:

El integrando es una función racional impropia, puesto que el numerador es de grado 5 y el denominador grado 1. Por lo tanto, se realiza la división, como se aprecia en la figura 9. Por lo tanto:

Reescribiendo la integral $\int \frac{x^5+x^3-20x}{x+2}dx = \int (x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 10x)dx$

Separando las integrales: $= \int x^4\,dx - 2\int x^3\,dx + 5\int x^2 dx - 10\int x\,dx$

Resolviendo cada integral, se obtiene finalmente que: $\int \frac{x^5+x^3-20x}{x+2}dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - 5x^2 + C$

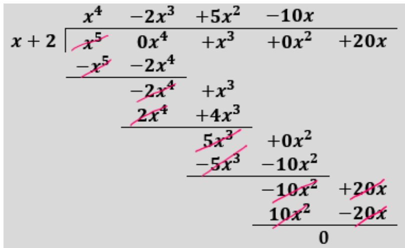


Figura 9. División aplicando el método de Ruffini

Cuando se trata de integrar una función propia, el método a utilizar se conoce como la descomposición por fracciones parciales, el cual consiste en descomponer la función racional propia original en otras fracciones propias más simples. Por ejemplo, la expresión:

$$f(x) = \frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1}$$

Está expresada en fracciones simples propias, cuya suma es igual a la función inicial. Para hallar las fracciones simples de una fracción racional propia se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Factorizar el denominador.	
2. Indicar las fracciones parciales, teniendo como denominador los factores del denominador, de acuerdo a los siguientes casos:	
CASO I	FACTORES LINEALES NO REPETIDOS Si al factorizar el denominador solo aparecen factores lineales diferentes. Para cada factor lineal[25] en el denominador, indicar una fracción parcial del tipo: $\frac{A}{ax+b}$
CASO II.	FACTORES LINEALES REPETIDOS Si al factorizar el denominador hay factores lineales repetidos, por cada expresión lineal repetida se indica, hasta igualar el exponente, una fracción parcial, de la forma: $\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \frac{C}{(ax+b)^3} + \cdots + \frac{N}{(ax+b)^n}$
CASO III	FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES NO REPETIDOS Si al factorizar el denominador se obtiene factores cuadráticos irreducibles (ax^2+b) no repetidos[26], entonces a cada expresión cuadrática le corresponde una fracción de la forma: $\frac{Ax+B}{ax^2+b}$
3. Multiplicar por el común denominador ambos lados de la igualdad y desarrollar.	
4. Agrupar los términos comunes y factorizar.	
5. Comparar término a término para establecer un sistema de ecuaciones igualando el coeficiente de los términos del mismo grado.	
6. Resolver el sistema de ecuaciones.	
7. Reescribir la fracción racional propia en sus fracciones parciales sustituyendo el valor de incógnita correspondiente en cada numerador e indicar una integral por cada fracción hallada.	
8. Resolver cada una de las integrales parciales indicadas.	

[25] Un factor lineal de la forma $ax+b$, significa que es un binomio cuya potencia es uno.
[26] Un factor cuadrático irreducible implica que no puede factorizarse y su solución conduce a resultados imaginarios,

Para los casos II y III son de gran utilidad las siguientes fórmulas:

Tabla 9. Fórmulas relacionadas con fracciones parciales cuyo denominador son factores cuadráticos irreducibles.

19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arc\,tan \frac{u}{a} + C$	20. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arc\,tan \frac{u}{a} + C$	21. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} ln \left\|\frac{u+a}{u-a}\right\| + C$

Analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 39 *Resolver* $\int \frac{5x+13}{x^2+5x+6} dx$

Solución

1. Factorizando el denominador: $x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$

2. Como los factores son lineales no repetidos, se aplica el Caso I, indicando las fracciones parciales como:

$$\frac{5x+13}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}$$

3. Multiplicando por el común denominador y desarrollando[27]:

$$\left(\frac{5x+13}{(x+3)(x+2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+2}\right)(x+3)(x+2)$$

$$\begin{aligned} 5x + 13 &= A(x+2) + B(x+3) \\ &= Ax + 2A + Bx + 3B \end{aligned}$$

4. Agrupando los términos comunes y factorizando:

$$5x + 13 = (A+B)x + (2A+3B)$$

5. Comparando término a término y estableciendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 5x = (A+B)x \quad &\Longrightarrow \quad A + B = 5 \\ 13 = (2A+3B) \quad &\Longrightarrow \quad 2A + 3B = 13 \end{aligned}$$

6. Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{r} (-2)\quad A + B = 5 \\ \underline{2A + 3B = 13} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{r} -2A - 2B = -10 \\ \underline{2A + 3B = 13} \\ B = 3 \end{array}$$

Sustituyendo $B = 3$ en $A + B = 5$:

$$\begin{aligned} A + 3 &= 5 \\ A &= 5 - 3 \\ A &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto: $A = 2$ y $B = 3$

7. Reescribiendo la integral inicial en sus fracciones parciales:

$$\int \frac{5x+13}{x^2+5x+6}\, dx = \int \frac{2}{x+3}\, dx + \int \frac{3}{x+2}\, dx$$

8. Resolviendo las integrales indicadas[28]:

$$= 2\,ln(x+3) + 3\,ln(x+2) + C$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos, el resultado se puede expresar como:

$$\int \frac{5x+13}{x^2+5x+6}\, dx = ln(x+3)^2\,(x+2)^3 + C$$

[27] Al realizar las operaciones indicadas, nota que el denominador del lado izquierdo de la igualdad se "cancela"; mientras que en las fracciones parciales se cancelan los factores comunes respectivos.
[28] En la solución se emplea las reglas de integración 3 y 6 respectivamente.

Ejemplo 40 *Resolver* $\int \frac{6x^3+4x^2+42x+6}{x^4+12x^2+27}dx$

Solución

1. Factorizando el denominador: $x^4+12x^2+27=(x^2+9)(x^2+3)$

2. Como los factores son cuadráticos irreducibles no repetidos, se aplica el Caso III, indicando las fracciones parciales como:

$$\frac{6x^3+4x^2+42x+6}{(x^2+9)(x^2+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+9}+\frac{Cx+D}{x^2+3}$$

3. Multiplicando por el común denominador y desarrollando[29]:

$$\left(\frac{6x^3+4x^2+42x+6}{(x^2+9)(x^2+3)}=\frac{Ax+B}{x^2+9}+\frac{Cx+D}{x^2+3}\right)(x^2+9)(x^2+3)$$

$$6x^3+4x^2+42x+6=(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+9)$$

$$6x^3+4x^2+42x+6=Ax^3+3Ax+Bx^2+3B+Cx^3+9Cx+Dx^2+9D$$

4. Agrupando los términos comunes y factorizando:

$$6x^3+4x^2+42x+6=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(3A+9C)x+(3B+9D)$$

5. Comparando término a término y estableciendo el sistema de ecuaciones:

$$6x^3=(A+C)x^3 \quad \Rightarrow \quad A+C=6 \qquad \text{E1}$$
$$4x^2=(B+D)x^2 \quad \Rightarrow \quad B+D=4 \qquad \text{E2.}$$
$$42x=(3A+9C)x \quad \Rightarrow \quad 3A+9C=42 \qquad \text{E3}$$
$$6=(3B+9D) \quad \Rightarrow \quad 3B+9D=6 \qquad \text{E4}$$

6. Resolviendo el sistema de ecuaciones:

De E1 y E3:

$$\begin{array}{r} (-3)\quad A+C=6 \\ 3A+9C=42 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -3A-3C=-18 \\ \underline{3A+9B=42} \\ 6C=24 \end{array}$$

De donde:

$$C=\frac{24}{6}=4$$

Sustituyendo $C=4$ en E1:

$$A+4=6$$
$$A=6-4$$
$$A=2$$

De E2 y E4:

$$\begin{array}{r} (-3)\quad B+D=4 \\ 3B+9D=42 \\ \hline \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} -3B-3D=-12 \\ \underline{3B+9D=6} \\ 6D=-6 \end{array}$$

De donde:

$$D=\frac{-6}{6}=-1$$

Sustituyendo $D=-1$ en E2:

$$B+(-1)=4$$
$$B-1=4$$
$$B=4+1$$
B= 5

Por lo tanto: $A=2,\quad B=5,\quad C=4,\quad D=-1$

[29] Al realizar las operaciones indicadas, nota que el denominador del lado izquierdo de la igualdad se cancela; mientras que en las fracciones parciales se cancelan los factores comunes respectivos.

7. Reescribiendo la integral inicial en sus fracciones parciales:

$$\int \frac{6x^3+4x^2+42x+6}{x^4+12x^2+27}dx = \int \frac{2x+5}{x^2+9}dx + \int \frac{4x-1}{x^2+3}dx$$

8. Separando cada integral para resolver:

$$= \int \frac{2x\ dx}{x^2+9} + \int \frac{5dx}{x^2+9} + \int \frac{4xdx}{x^2+3} + \int \frac{-1dx}{x^2+3}$$

Resolviendo la primera integral con la regla 6 de integración de la tabla 4, con:

$$v = x^2+9\ ;\ dv = 2xdx$$

separando la constante y completando:

$$\int \frac{2x\ dx}{x^2+9} = \frac{2}{2}\int \frac{x}{x^2+9}2dx = ln|x^2+9|$$

Resolviendo la segunda integral, con: $u = x\ ; a = \sqrt{9}$ y $du = dx$ a partir de la regla 19 de integración de la tabla 9.

$$\int \frac{5dx}{x^2+9} = 5\int \frac{dx}{x^2+9} = 5\left[\frac{1}{\sqrt{9}}arc\ \ tan\frac{x}{\sqrt{9}}\right] = \frac{5}{3}arc\ \ tan\ \ \frac{x}{3}$$

Resolviendo la tercera integral con la regla 6 de integración de la tabla 4, con:

$$v = x^2+3\ ;\ dv = 2xdx$$

separando la constante y completando:

$$\int \frac{4xdx}{x^2+3} = \frac{4}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+3} = 2\ln|x^2+3|$$

Resolviendo la cuarta integral, con: $u = x\ ; a = \sqrt{3}$ y $du = dx$ a partir de la regla 19 de integración de la tabla 9.

$$\int \frac{-1dx}{x^2+3} = -\int \frac{dx}{x^2+3} = -1\int \frac{dx}{x^2+3} = -1\left[\frac{1}{\sqrt{3}}arc\ \ tan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}arc\ \ tan\frac{x}{\sqrt{3}}$$

Unificando los resultados de las integrales indicadas, finalmente se tiene que:

$$\int \frac{6x^3+4x^2+42x+6}{x^4+12x^2+27}dx = ln|x^2+9| + \frac{5}{3}arc\ \ tan\frac{x}{3} + 2\,ln|x^2+3| - \frac{1}{\sqrt{3}}arc\ \ tan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

Ejemplo 41 *Resolver* $\int \frac{7x^2+17x+30}{x^3+5x^2+5x+25}dx$

Solución

1. Factorizando el denominador[30]:

$$x^3+5x^2+5x+25 = x^2(x+5)+5(x+5)$$
$$= (x+5)(x^2+5)$$

2. De la estructura de los factores se puede observar que uno es lineal y el otro es cuadrático irreducible, por lo que se indican las fracciones parciales combinado el caso I y II, como sigue:

$$\frac{7x^2+17x+30}{(x+5)(x^2+5)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+5}$$

3. Multiplicando por el común denominador y desarrollando[31]:

$$\left(\frac{7x^2+17x+30}{(x+5)(x^2+5)} = \frac{A}{x+5} + \frac{Bx+C}{x^2+5}\right)(x+5)(x^2+5)$$

$$7x^2+17x+30 = A(x^2+5)+(Bx+C)(x+5)$$

$$7x^2+17x+30 = Ax^2+5A+Bx^2+5Bx+Cx+5C$$

---

[30] En esta factorización se aplicó el método de agrupación.

[31] Al realizar las operaciones indicadas, nota que el denominador del lado izquierdo de la igualdad se "cancela"; mientras que en las fracciones parciales se cancelan los factores comunes respectivos.

4. Agrupando los términos comunes y factorizando:

$$7x^2 + 17x + 30 = (A + B)x^2 + (5B + C)x + (5A + 5C)$$

5. Comparando término a término y estableciendo el sistema de ecuaciones:

$7x^2 = (A + B)x^2 \quad \Rightarrow \quad A + B = 7 \quad$ E1

$17x = (5B + C)x \quad \Rightarrow \quad 5B + C = 17 \quad$ E2

$30 = (5A + 5C)x \quad \Rightarrow \quad 5A + 5C = 30 \quad$ E3

6. Resolviendo el sistema de ecuaciones:

Despejando A de E1: $A + B = 7 \quad \Rightarrow \quad A = 7 - B$

Sustituyendo A en E3:

$5(7 - B) + 5C = 30$
$35 - 5B + 5C = 30$
$-5B + 5C = 30 - 35$
$-5B + 5C = -5 \quad$ E4

De E2 y E4:

$$\begin{array}{r} 5B + C = 17 \\ \underline{-5B + 5C = -5} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 5B + C = 17 \\ \underline{-5B + 5C = -5} \\ 6C = 12 \end{array}$$

De donde:

$$C = \frac{12}{6} = 2$$

Sustituyendo $C = 2$ en E4:

$-5B + 5(2) = -5$
$-5B + 10 = -5$
$-5B = -5 - 10$
$-5B = -15$
B$= \frac{-15}{-5} = 3$

Sustituyendo $B = 3$ en E1:

$A + 3 = 7$
$A = 7 - 3$
$A = 4$

Por lo tanto: $A = 4, \quad B = 3, \quad C = 2$

7. Reescribiendo la integral inicial en sus fracciones parciales: $\frac{7x^2+17x+30}{(x+5)(x^2+5)} = \frac{4}{x+5} + \frac{3x+2}{x^2+5}$

8. Separando cada integral para resolver: $= \int \frac{4\,dx}{x+5} + \int \frac{3x\,dx}{x^2+5} + \int \frac{2\,dx}{x^2+5}$

Resolviendo <u>la primera integral</u> con la regla 6 de integración de la tabla 4, con:
$v = x + 5 \ ; \ dv = dx$

$$\int \frac{4\,dx}{x+5} = 4\int \frac{dx}{x+5} = 4\,ln|x + 5|$$

Resolviendo la <u>segunda integral</u>, con la regla 6 de la tabla 4 considerando $u = x^2 + 5$; y $du = 2x\,dx$, separando la constante y completando:

$$\int \frac{3x\,dx}{x^2+5} = 3\int \frac{x\,dx}{x^2+5} = \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+5} = \frac{3}{2}ln|x^2 + 5|$$

Resolviendo la <u>tercera integral</u>, con:
$u = x \ ; \ a = \sqrt{5}$ y $du = dx$ a partir de la regla 19 de integración de la tabla 9.

$$\int \frac{2dx}{x^2+5} = 2\int \frac{dx}{x^2+5} = 2\left[\frac{1}{\sqrt{5}} arc \ \ tan \frac{x}{\sqrt{5}}\right] = \frac{2}{\sqrt{5}} arc \ \ tan \frac{x}{\sqrt{5}}$$

Unificando los resultados de las integrales indicadas, finalmente se tiene que:

$$\int \frac{7x^2 + 17x + 30}{x^3 + 5x^2 + 5x + 25}\ dx = 4\,ln|x + 5| + \frac{3}{2}ln|x^2 + 5| + \frac{2\sqrt{5}}{5} arc \ \ tan \frac{\sqrt{5}x}{5} + C$$

ACTIVIDAD 8 *Aplica el método de integración por fracciones parciales para resolver las siguientes integrales*

1. $\int \frac{36+2x}{x^2-3x-40}\ dx$	2. $\int \frac{3x^2-x-43}{x^3-x^2+8x-8}\ dx$
3. $\int \frac{x^3-2x^2+6x+11}{x^4-3x^2-4}\ dx$	4. $\int \frac{2x-3}{x^2-5x-6}\ dx$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo F.**

BLOQUE IV. INTEGRAL DEFINIDA Y APLICACIONES

Actividad 9. Notación sigma

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Usa la notación y las propiedades de la sumatorias para determinar sumas finitas e infinitas
- **Atributo (s):**
  - Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
  - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):**
  - Notación sigma

Lectura previa: Notación sigma

La notación sigma es una notación matemática que permite representar la suma de muchos términos o incluso infinitos sumandos, evitando el empleo de los puntos suspensivos. El símbolo usado para expresarlo es la letra griega Σ. Algebraicamente se representa como:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 \dots\ a_n$$

Figura 10. Definición algebraica de la sumatoria

La expresión de la izquierda se lee como "la sumatoria de a_i desde uno hasta n". Donde:

i es la variable y representa el valor inicial, llamado límite inferior.

n es valor final, llamado límite superior.

a_i representa la expresión algebraica que define cada término de la suma, es decir, el término general. En la sumatoria debe cumplirse que $i < n$ y n es un número natural.

Algunas propiedades de la notación sigma son:

Tabla 10. Propiedades de las sumatorias.

PROPIEDAD	REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA	INTERPRETACIÓN
1.	$\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$	La sumatoria de una suma de términos es igual a la sumatoria de cada uno de los términos.
2.	$\sum_{i=1}^{n} c(a_i) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$	La sumatoria del producto por el término general es igual al producto del valor constante por la sumatoria del término general.

Para determinar de manera específica el valor de una suma a partir de la sumatoria, son útiles las siguientes fórmulas.

Tabla 11. Fórmulas de la sumatoria para algunos números naturales.

Sumatoria	Fórmula
1. De la unidad:	$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
2. De una constante:	$\sum_{i=1}^{n} c = cn$
3. De los números naturales:	$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
4. Del cuadrado de los números naturales:	$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
5. Del cubo de los números naturales:	$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
6. De una constante, si $\boldsymbol{i = 0}$	$\sum_{i=0}^{n} c = c(n+1)$

La obtención de una suma puede realizarse mediante la notación sigma a través de las propiedades o en su forma desarrollada, según la cantidad de términos que deban sumarse. En caso de que el número de sumandos sea infinito, el valor de la sumatoria es su límite cuando n tiende a ∞ como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 42 *Calcula la siguiente suma* $\sum_{i=3}^{5} i^4$

Solución: En este caso se puede apreciar que el número de sumandos son tres, de manera que $\boldsymbol{i}$ toma valores desde 3 hasta 5. Por lo tanto:

Resolviendo en su forma desarrollada:
$$\sum_{i=3}^{5} i^4 = 3^4 + 4^4 + 5^4 = 81 + 256 + 625 = 962$$

Luego entonces el valor de la sumatoria:
$$\sum_{i=3}^{5} i^4 = 962$$

Ejemplo 43 *Calcula la siguiente suma* $\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \frac{\boldsymbol{i+1}}{\boldsymbol{n^2}}$

Solución:
Puesto que los sumandos son infinitos, nos conviene hallar el valor de la suma a través de las propiedades y fórmulas antes mencionadas. Por lo tanto:

Como la variable es i, entonces consideramos que $\frac{1}{n^2}$ es una constante. Aplicando la propiedad 2 de la tabla 9:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}(i+1) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1)$$

Aplicando la propiedad 1 de la tabla 9:

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

Aplicando las fórmulas 3 y 1 respectivamente de la tabla 10.

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

Realizando las operaciones indicadas en los corchetes:

$$\frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+n}{2} + n\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+n+2n}{2}\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n^2+3n}{2}\right] = \frac{1}{n^2}\left[\frac{n(n+3)}{2}\right] = \frac{n+3}{2n}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}(i+1) = \frac{n+3}{2n}$$

Aplicando el límite[32]:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{2n} = \frac{\frac{n+3}{n}}{\frac{2n}{n}} = \frac{1+\frac{3}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}(i+1) = \frac{1}{2}$$

ACTIVIDAD 9 *Aplica las propiedades y las fórmulas correspondientes para hallar el valor de las siguientes sumatorias*

1. $\sum_{i=1}^{4} i^4$	3. $\sum_{i=1}^{n} (4-3i) =$
2. $\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{2-i}{4}\right) =$	4. $\sum_{i=1}^{7} (3i-2)^3 =$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo G**.

[32] Realizando la división de la función entre la variable de mayor potencia (en este caso n) y aplicando el límite especial: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Actividad 10. Aproximación del área bajo una curva

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Aplica la integral definida para obtener áreas bajo la curva de funciones que se relacionen con situaciones de su entorno promoviendo el desarrollo de su creatividad.
- **Atributo (s):**
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
- **Conocimiento (s):**
  - Aproximación del área bajo una curva

Lectura previa: Método Exhaustivo

Dos problemas geométricos motivaron a las dos ideas más grandes del cálculo:

- El problema de la tangente nos condujo a la derivada.
- El problema del área nos llevará a la integral definida.

Para las regiones de área limitadas por curvas, el problema de obtener su área representa un cierto grado de dificultad. Sin embargo, este problema fue resuelto hace más de 2000 años por Arquímedes a través del método exhaustivo. La idea básica de Arquímedes fue considerar una sucesión de polígonos inscritos en el interior de la región, que se aproximaba al área de la región curva con una precisión cada vez más grande. Tomando como ejemplo un círculo de radio r y considerando polígonos inscritos regulares de cada vez de mayor número de lados, como se muestra en la figura 11, se puede concluir el área del círculo es el límite cuando $n \to \infty$ de las áreas de enésimo polígono P_n, donde n es el número de lados, es decir:

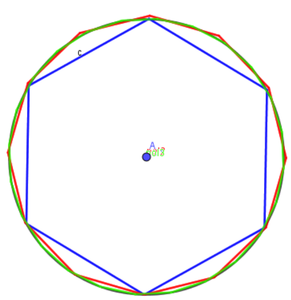


Figura 11. Aproximación del área de un círculo

$$Ac = \lim_{n \to \infty} A_{P_n}$$

A partir de lo anterior, la aproximación del área de una región curva se puede estimar si ésta es una región cerrada, es decir, debe estar acotada por las rectas verticales $x = a$, $x = b$ que intersecan al eje x, y por la gráfica de una función f que es continua y no negativa en el intervalo cerrado [a, b], como se muestra en la figura 10.

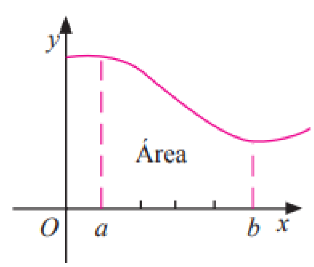


Figura 12. Idea intuitiva del área bajo una curva

Para estimar el valor del área de una región con las condiciones anteriores, se sugiere el siguiente procedimiento:

1.	Trazar la gráfica de la región y dividirla en partes iguales (trazar rectángulos inscritos o circunscritos según el caso).
2.	Calcular la longitud de la base de cada rectángulo como: $\boldsymbol{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$
3.	Determinar la altura de cada rectángulo, sustituyendo los valores $(\boldsymbol{x_i})$ iniciales o terminales de su base correspondiente en la función dada.

4. Calcular el área de cada rectángulo a partir de $\boldsymbol{A_{R_i}} = \Delta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_i})$
5. Sumar las áreas obtenidas para estimar el área de la región dada.

Si el procedimiento se realiza mediante rectángulos inscritos, el área estimada se llama Suma del límite inferior (A_{inf}), este valor es menor que el área real de la región. Mientras que, si se procede mediante rectángulos circunscritos, el área estimada se conoce como Suma del límite superior (A_{sup}), cuyo valor es mayor que el área real de la región, por lo que se puede concluir que:

$$A_{inf} < A_R < A_{sup}$$

Observa el siguiente ejemplo:

Ejemplo 44 *Hallar el área aproximada de la región acotada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$, el eje x, en el intervalo $[2,4]$ y dividiendo la región en 5 partes iguales, usando rectángulos inscritos y circunscritos.*

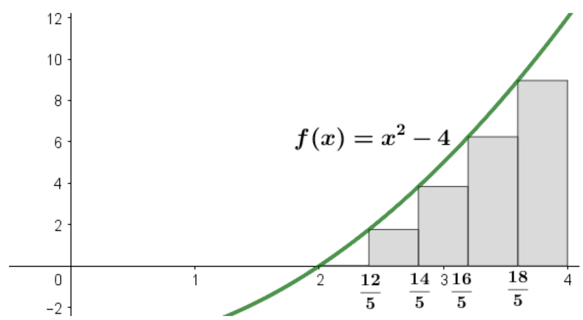
Solución:

De los datos dados se sabe que:

$a = 2\ ;\ b = 4\ ;\ n = 5$

Calculado la longitud de la base de cada rectángulo:

$$\Delta x = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$$



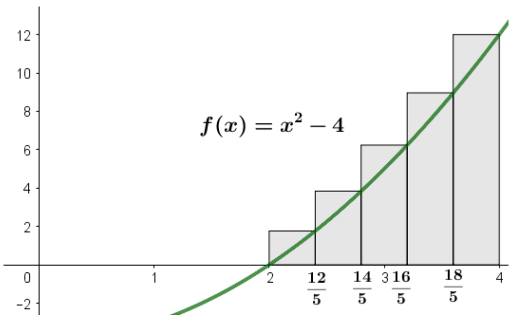
<u>Usando rectángulo inscritos:</u>

Considerando rectángulos inscritos el área de la región queda dividida como se muestra en la figura de la derecha. Nota que con el número de divisiones se obtiene cuatro rectángulos y que la altura de cada uno está determinada por el valor de lado izquierdo de cada subintervalo.

Para facilitar el procedimiento elaboramos la siguiente tabla:

Rectángulo $\boldsymbol{R_i}$	**Base** $\Delta \boldsymbol{x}$	**Valor inicial** $\boldsymbol{x_i}$	**Altura** $\boldsymbol{f(x_i)}$	**Área** $\Delta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{f(x_i)}$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$f\left(\frac{12}{5}\right) = \left(\frac{12}{5}\right)^2 - 4 = \frac{44}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{44}{25} = \frac{88}{125}$
2	$\frac{2}{5}$	$\frac{14}{5}$	$f\left(\frac{14}{5}\right) = \left(\frac{14}{5}\right)^2 - 4 = \frac{96}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{96}{25} = \frac{192}{125}$
3	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$	$f\left(\frac{16}{5}\right) = \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4 = \frac{156}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{156}{25} = \frac{312}{125}$
4	$\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$	$f\left(\frac{18}{5}\right) = \left(\frac{18}{5}\right)^2 - 4 = \frac{224}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{224}{25} = \frac{448}{125}$
			Suma de las áreas	$\frac{1040}{125}$

Por lo tanto, la Suma inferior del área de la región es $S_{inf} = \frac{1040}{125}\ u^2$ o $S_{inf} = 8.32\ u^2$.



Usando rectángulo circunscritos:

Considerando rectángulos circunscritos el área de la región queda dividida como se muestra en la figura de la izquierda. Observa ahora que se genera un rectángulo más en la región y que las alturas están definidas por los valores terminales de cada subintervalo.

De la misma forma que en el caso anterior, elaboramos la tabla siguiente:

Rectángulo R_i	Base Δx	Valor inicial x_i	Altura $f(x_i)$	Área $\Delta x \cdot f(x_i)$
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$f\left(\frac{12}{5}\right) = \left(\frac{12}{5}\right)^2 - 4 = \frac{44}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{44}{25} = \frac{88}{125}$
2	$\frac{2}{5}$	$\frac{14}{5}$	$f\left(\frac{14}{5}\right) = \left(\frac{14}{5}\right)^2 - 4 = \frac{96}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{96}{25} = \frac{192}{125}$
3	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$	$f\left(\frac{16}{5}\right) = \left(\frac{16}{5}\right)^2 - 4 = \frac{156}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{156}{25} = \frac{312}{125}$
4	$\frac{2}{5}$	$\frac{18}{5}$	$f\left(\frac{18}{5}\right) = \left(\frac{18}{5}\right)^2 - 4 = \frac{224}{25}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{224}{25} = \frac{448}{125}$
5	$\frac{2}{5}$	4	$f(4) = (4)^2 - 4 = 12$	$\frac{2}{5} \cdot 12 = \frac{24}{5}$
			Suma de las áreas	$\frac{328}{25}$

Por lo tanto, la suma superior del área de la región es $S_{sup} = \frac{328}{25}\ u^2$ o $S_{sup} = 13.12\ u^2$.

De los dos procedimientos realizados se puede concluir que el área de la región se encuentra entre los siguientes valores:

$$\frac{1040}{125}\ u^2 < A_R < \frac{328}{25}\ u^2 \quad \text{o} \quad 8.32\ u^2 < A_R < 13.12\ u^2$$

Por consiguiente, estimando el valor como el promedio de los valores se tiene que $A_R \approx 10.72\ u^2$.

ACTIVIDAD 10

Determina el área aproximada de las regiones a partir de las condiciones dadas. Usa rectángulos inscritos y circunscritos en cada caso. Usa algún graficador para generar la figura.

1. $f(x) = 4x + 5;\quad x = 2,\quad x = 5$ y $n = 5$	2. $f(x) = 4 - x^2;\quad [-2,\ 2]$ con $n = 6$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo G**.

Actividad 11. Suma de Riemann

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Reconoce la importancia de la Suma de Riemann para determinar áreas bajo una curva como antecedente de la integral definida.

- **Atributo (s): /**
  - Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
  - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

- **Conocimiento (s):**
  - Suma de Riemann

Lectura previa: Suma de Riemann

La suma de Riemann[33] es la generalización del método exhaustivo para aproximar el valor del área de una región delimitada por una curva, a partir de dos conceptos básicos: la notación sumatoria y el límite.
Hasta este punto, hemos podido aproximar el área de una región delimitada por una función f y acotada por el eje X y el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, dividiéndola en n rectángulos.

Observamos en el procedimiento que, al usar rectángulos inscritos, la altura de dicho rectángulo está determinada por los valores de los extremos izquierdos de cada subintervalo; mientras que, en los rectángulos circunscritos, dicha altura está definida por los extremos derechos de cada subintervalo, como se muestra en la figura 13.

Si el ***extremo derecho*** de cada rectángulo circunscrito se define como M_i e i representa el lado terminal de dicho rectángulo, entonces $M_i = a + (\Delta x)i$.
De la misma manera, si el ***extremo izquierdo*** de cada rectángulo inscrito se define como m_i, entonces: $m_i = a + (i-1)\Delta x$.
De lo anterior se puede concluir que:

	Rectángulos inscritos	Rectángulo circunscrito
Altura	$f(m_i)$	$f(M_i)$
Área	$f(m_i)\Delta x$	$f(M_i)\Delta x$
área total	$s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$	$S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$

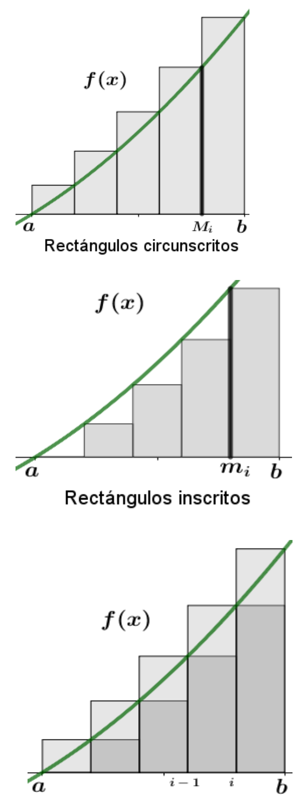


Figura 13. Condiciones de la altura según el tipo de rectángulo.

[33] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Matemático alemán que en contribuyó a muchísimas ramas de las matemáticas. Dentro del cálculo infinitesimal se pueden encontrar las Integrales de Riemann, Aproximación de Riemann, Método de Riemann para series trigonométricas, entre otras. matrices de Riemann de la teoría de funciones abelianas, funciones zeta de Riemann, hipótesis de Riemann, teorema

A la suma de las áreas de los rectángulos inscritos se le llama suma inferior $s(n)$ y a la suma del área de los rectángulos circunscritos se le denomina suma superior $S(n)$.
En ambos casos el valor del área son las mismas.
A partir de lo anterior, la suma de Riemann establece que "si f definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ y sea Δ una partición de $[a,b]$ dada por: $a = x_0 \langle x_1 \langle x_2 \langle \ldots \langle x_{n-2} \langle x_n = b$. Donde Δx_i es la longitud del i-ésimo subintervalo y si c_i es cualquier punto del i-ésimo subintervalo, entonces la suma:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_1)\Delta x_i \qquad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

Es la Suma de Riemann asociada a la partición Δ".

Luego entonces el área de la región limitada por la gráfica de$f$, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es:

$$Área = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x\,, \quad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

Donde f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

En dicha expresión si se toman los valores izquierdos $c_i = m_i = a + (i-1)\Delta x$; si se toman los valores derechos del subintervalo, entonces: $c_i = M_i = a + i\Delta x$.

La elección de x en el i-ésimo intervalo no afecta el límite, lo cual deja a libertad elegir un valor arbitrario de x en cada subintervalo, por lo que se puede tomar los extremos derechos o izquierdos. En ambos casos el valor del área es la misma.

Para obtener el área aplicando la suma de Riemann se sugiere el siguiente procedimiento:

1. Determina $\Delta \boldsymbol{x}$ con los datos iniciales dados.
2. Decidir el extremo del subintervalo a utilizar y determina $\boldsymbol{c_i}$.
3. Determinar $\boldsymbol{f(c_i)}$ sustituyendo $\boldsymbol{c_i}$ en la función $\boldsymbol{f(x)}$. Realiza las operaciones indicadas.
4. Determina $\boldsymbol{f(c_i)\Delta x}$ y realiza las operaciones indicadas.
5. Aplica la notación sigma a $\boldsymbol{f(c_i)\Delta x}$ y aplica las propiedades y fórmulas correspondientes.
6. Aplica el límite a la sumatoria para obtener el área de la región.

Observa y analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 45 *Hallar el área de la región acotada por la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$, el eje x, en el intervalo [2,4], aplicando la suma de Riemann. Usando el extremo derecho e izquierdo de cada subintervalo.*

Solución:

I. Usando el <u>extremo derecho</u> de cada subintervalo, es decir, $c_i = M_i = a + i\Delta x$. Por lo tanto:

Datos $\quad f(x) = x^2 - 4\,;\ a = 2;\ b = 4$

1. Calculando Δx $\quad \Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$

2. Calculando c_i $\quad c_i = 2 + i\left(\frac{2}{n}\right) = 2 + \frac{2i}{n}$

3. Calculando $f(c_i)$ $\quad f(c_i) = \left(2 + \frac{2i}{n}\right)^2 - 4 = 4 + \frac{8i}{n} + \frac{4i^2}{n^2} - 4 = \frac{8i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}$

4. Calculando $f(c_i)\Delta x$ $\quad f(c_i)\Delta x = \left(\frac{8i}{n} + \frac{4i^2}{n^2}\right)\frac{2}{n} = \frac{16i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3}$

5. Aplicando la notación sigma y aplicando la propiedad 1 de la tabla 10

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16i}{n^2} + \frac{8i^2}{n^3}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{16i}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^3}$$

Aplicando la propiedad 2 de la tabla 10.

$$= \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

Aplicando las fórmulas 3, 4 y 1 respectivamente de la tabla 11.

$$= \frac{16}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

Realizando las operaciones indicadas:

$$= \frac{16}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$$

6. Realizando las operaciones indicadas, reacomodando y aplicando límite:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{16}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) + \frac{8}{6}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}\right)$$

Calculando el límite[34]:

$$8(1) + \frac{4}{3}(2) = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

Por lo tanto, el área real de la región dada es $A = \frac{32}{3}\,u^2$ o $A = 10.66\,u^2$

[34] Para determinar el límite se aplica el criterio de la relación entre el grado de numerador y grado del denominador. En este caso como ambos grados coinciden, entonces el límite corresponde al cociente entre los coeficientes de los términos principales del numerador y el denominador.

II. Usando el extremo izquierdo de cada subintervalo, es decir, $c_i = m_i = a + (i-1)\Delta x$. Procedemos como sigue:

Datos $\qquad f(x) = x^2 - 4\,;\ a = 2;\ b = 4$

1. Calculando Δx $\qquad \Delta x = \frac{4-2}{n} = \frac{2}{n}$

2. Calculando c_i $\qquad c_i = 2 + (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) = 2 + \frac{2(i-1)}{n}$

3. Calculando $f(c_i)$ y realizando las operaciones indicadas:

$$f(c_i) = \left(2 + \frac{2(i-1)}{n}\right)^2 - 4 = 4 + \frac{8(i-1)}{n} + \frac{4(i-1)^2}{n^2} - 4 = \frac{8(i-1)}{n} + \frac{4(i^2-2i+1)}{n^2}$$

4. Calculando $f(c_i)\Delta x$ $\qquad f(c_i)\Delta x = \left(\frac{8(i-1)}{n} + \frac{4(i^2-2i+1)}{n^2}\right)\frac{2}{n} = \frac{16(i-1)}{n^2} + \frac{8(i^2-2i+1)}{n^3}$

5. Aplicando la notación sigma y aplicando la propiedad 2 y 1 respectivamente de la tabla 10:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{16(i-1)}{n^2} + \frac{8(i^2-2i+1)}{n^3}\right) = \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i^2-2i+1)$$

Aplicando la propiedad 1 en cada sumatoria:
$$= \frac{16}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right] + \frac{8}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

Aplicando las fórmulas 2, 3 y 1 respectivamente de la tabla 11.

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \frac{16}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - n\right] + \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + n\right]$$

Realizando las operaciones indicadas:
$$= \frac{16}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2} - n\right) + \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - (n^2+n) + n\right)$$

$$= \frac{16}{n^2}\left(\frac{n^2+n-2n}{2}\right) + \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6} - n^2 - n + n\right)$$

$$= \frac{16}{n^2}\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + \frac{8}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2}{6}\right)$$

Reacomodando en términos de n:
$$= \frac{16}{2}\left(\frac{n^2-n}{n^2}\right) + \frac{8}{6}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}\right)$$

6. Aplicando el límite
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = 8\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n}{n^2}\right) + \frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{n^3}\right)$$

7. Calculando el límite:
$$= 8(1) + \frac{4}{3}(2) = 8 + \frac{8}{3} = \frac{32}{3}$$

Por lo tanto, el área real de la región dada es $A = \frac{32}{3}\,u^2$ o $A = 10.66\,u^2$

Nota que se llegan al mismo resultado en ambos procedimientos.

ACTIVIDAD 11

Determina el área las regiones delimitadas por las funciones indicadas, el eje X y en los intervalos dados, aplicando la Suma de Riemann. Usa el valor del extremo que consideres. Compara tu resultado con los obtenidos en la actividad 4.2

1. $f(x) = 4x + 5; \quad [2,5]$	2. $f(x) = 4 - x^2; \quad [-2,2]$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo G**.

Actividad 12. La integral definida

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Aplica la integral definida para obtener áreas bajo la curva de funciones que se relacionen con situaciones de su entorno promoviendo el desarrollo de su creatividad.
- **Atributo (s):**
  - Enfrenta las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
  - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- **Conocimiento (s):**
  - La integral definida

Lectura previa: Definición de integral definida y el Teorema fundamental del cálculo.

El límite propuesto por Riemann para obtener el área de una región se conoce como integral definida. Algebraicamente se denota como:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Donde a y b, los extremos del intervalo, se conocen como limites de integración inferior y superior respectivamente. La expresión anterior corresponde al valor del área de una región siempre y cuando la función esté definida en el intervalo [a,b] y el limite de la suma de Riemann exista.

El valor de una integral definida se obtiene a partir del Teorema Fundamental del cálculo, es decir:

$$\int_a^b f(x) = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Donde $F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

Evaluar una integral definida significa integrar la función y sustituir los límites de integración. Como se muestra en los siguiente ejemplos:

Ejemplo 46 *Evaluar* $\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)dx$

Solución:

Resolviendo la integral $$\int_{-1}^{2}(4x - 6x^2)dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{6x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$

realizando las operaciones indicadas: $$= (2x^2 - 2x^3)\Big|_a^b$$

Sustituyendo los límites de integración: $= [2(2)^2 - 2(2)^3] - [2(-1)^2 - 2(-1)^3]$

Realizando las operaciones indicadas: $= [8 - 16] - [2 + 2] = (-8) - (4)$

Por lo tanto: $\int_{-1}^{2} (4x - 6x^2)dx = -12$

Ejemplo 47 *Evaluar* $\int_2^6 (x^3 - 12x^2 + 45x + 20)dx$

Solución:

Resolviendo la integral $$\int_2^6 (x^3 - 12x^2 + 45x + 20)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{12x^3}{3} + \frac{45x^2}{2} + 20x\right]_2^6$$

realizando las operaciones indicadas: $$= \left[\frac{x^4}{4} - 4x^3 + \frac{45x^2}{2} + 20x\right]$$

Sustituyendo los límites de integración:

$$\int_2^6 (x^3 - 12x^2 + 45x + 20)dx = \left[\frac{(6)^4}{4} - 4(6)^3 + \frac{45(6)^2}{2} + 20(6)\right] - \left[\frac{(2)^4}{4} - 4(2)^3 + \frac{45(2)^2}{2} + 20(2)\right]$$

Realizando las operaciones indicadas:
$$= (324 - 864 + 810 + 120) - (4 - 32 + 90 + 40)$$
$$= (390) - (102)$$

Por lo tanto: $$\int_2^6 (x^3 - 12x^2 + 45x + 20)dx = 288$$

Ejemplo 48 *Evaluar* $\int_3^4 \frac{\mathbf{2x^3-5x+3}}{\mathbf{x-2}} \boldsymbol{dx}$

Solución:

Puesto que la función es racional impropia, reescribimos la función aplicando previamente la división de polinomios, como se muestra en la figura de la derecha.

Reescribiendo la integral: $$\int_3^4 \frac{\mathbf{2x^3 - 5x + 3}}{\mathbf{x - 2}} \boldsymbol{dx} = \int_3^4 \left(\mathbf{2x^2 + 4x + 3 + \frac{9}{x - 2}}\right) \boldsymbol{dx}$$

Resolviendo la integral[35]: $= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x^2 + 3x + 9\,ln(x-2)\right]_3^4$

Sustituyendo los límites de integración:

$$\int_3^4 \frac{\boldsymbol{2x^3 - 5x + 3}}{\boldsymbol{x-2}}\boldsymbol{dx} = \left[\frac{2(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 3(4) + 9\,ln(4-2)\right] - \left[\frac{2(3)^3}{3} + 2(3)^2 + 3(3) + 9\,ln(3-2)\right]$$

Realizando las operaciones indicadas: $= \left[\frac{128}{3} + 32 + 12 + 6.2383\right] - [18 + 18 + 9 + 0]$

$= (92.905) - (45) = 47.905$

Por lo tanto: $\int_3^4 \frac{\boldsymbol{2x^3 - 5x + 3}}{\boldsymbol{x-2}}\boldsymbol{dx} = 47.905$

Ejemplo 49 *Evaluar* $\int_0^{\pi/4} sec^2 x dx$

Solución:

Resolviendo la integral $\int_0^{\pi/4} sec^2 x dx = \tan x]_0^{\pi/4}$

Sustituyendo los límites de integración: $\int_0^{\pi/4} sec^2 x dx = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0)$

Realizando las operaciones indicadas: $= 1 - 0$

Por lo tanto: $\int_0^{\pi/4} sec^2 x dx = 1$

Observa y analiza el siguiente ejemplo, donde resuelve la integral definida aplicando el método de integración por sustitución o cambio de variable.

Ejemplo 50 *Evaluar* $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx$

Solución:

Identificando u, du y despejando dx: $u = 2x + 1$; $du = 2dx$; $dx = \frac{du}{2}$

Cambiando los límites de integración: Cuando:
$x = 0 \Longrightarrow u = 2(0) + 1 = 1$
$x = 4 \Longrightarrow u = 2(4) + 1 = 9$

[35] En caso de que al determinar la integral indefinida obtengamos una función que incluya logaritmos en su resultado, por lo regular se considera el valor absoluto del argumento, pues en este tipo de funciones el argumento debe ser positivo (ni siquiera puede ser cero).

Realizando el cambio de variable: $$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{2}\int_1^9 \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\int_1^9 u^{1/2}du$$

Resolviendo la integral en términos de u: $$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} = \left[\frac{u^{3/2}}{3}\right]\begin{matrix}9\\1\end{matrix}$$

Sustituyendo los límites de integración: $$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \left[\frac{(9)^{3/2}}{3}\right] - \left[\frac{(1)^{3/2}}{3}\right]$$

Realizando las operaciones indicadas: $$= \frac{27}{3} - \frac{1}{3}$$

Por lo tanto: $$\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \frac{26}{3}$$

Nota que, en este ejemplo, no es necesario expresar el resultado en términos de la variable original, ya que los límites de integración se adecuaron para la variable u.

Ejemplo 51 *Evaluar* $\int_1^2 x^6 lnxdx$

Solución.

Puesto que la integral no se asocia de manera directa con las reglas de integración, pero es un producto de funciones, entonces aplicamos la integración por partes.

Asignando u y dv $$u = \ln x \qquad dv = x^6dx$$

Diferenciando u e integrando dv $$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \int x^6 dx \qquad v = \frac{x^7}{7}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes: $$\int_1^2 x^6 lnxdx = \left[\ln x\cdot\frac{x^7}{7} - \int_1^2 \frac{x^7}{7}\cdot\frac{1}{x}dx\right]_1^2$$

Realizando las operaciones indicadas: $$= \left[\frac{x^7}{7}\ln x - \frac{1}{7}\int x^6dx\right]_1^2$$

Resolviendo la integral indicada y factorizando: $$= \left[\frac{x^7}{7}\ln x - \frac{1}{7}\cdot\frac{x^7}{7}\right]_1^2 = \frac{1}{7}\left[x^7\ln x - \frac{x^7}{7}\right]_1^2$$

Sustituyendo los límites de integración: $$\int_1^2 x^6 lnxdx = \frac{1}{7}\left[2^7\ln 2 - \frac{2^7}{7}\right] - \frac{1}{7}\left[1^7\ln 1 - \frac{1^7}{7}\right]$$

Realizando las operaciones indicadas: $$= \frac{1}{7}\left[128(0.69) - \frac{128}{7}\right] - \frac{1}{7}\left[1(0) - \frac{1}{7}\right]$$
$$= \frac{1}{7}[88.72 - 18.28] - \frac{1}{7}\left[-\frac{1}{7}\right]$$
$$= \frac{1}{7}[70.44] + \frac{1}{49} = 10.06 + 0.020$$

Por lo tanto: $$\int_1^2 x^6 lnxdx \approx 10.08$$

ACTIVIDAD 12 *Evalúa con el Teorema fundamental del cálculo las siguientes integrales definidas.*

1. $\int_0^3 (3x^2 + x - 2)dx$	2. $\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^2} dx$
3. $\int_0^{\pi/2} sen^3 x cos x dx$	4. $\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx$
5. $\int_0^1 (2x-1)^2 dx$	6. $\int_{-1}^1 \left(x^{4/3} + 4x^{1/3}\right)dx$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo G**

ACTIVIDAD 13. Área bajo una curva.

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Aplica la integral definida para obtener áreas bajo la curva de funciones que se relacionen con situaciones de su entorno promoviendo el desarrollo de su creatividad.

- **Atributo (s):**
  - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
  - Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

- **Conocimiento (s):**
  - Área de regiones planas

Lectura previa: Área bajo una curva

En el tema anterior nos familiarizamos con el procedimiento de evaluar una integral definida, de tal manera que obtuvimos valor en cada caso. Sin embargo, hay que ser cautelosos al momento de asociar una integral definida con el área bajo una curva. Observa la figura 14 y su relación con la siguiente integral:

$$\int_{-5}^{1} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)dx$$

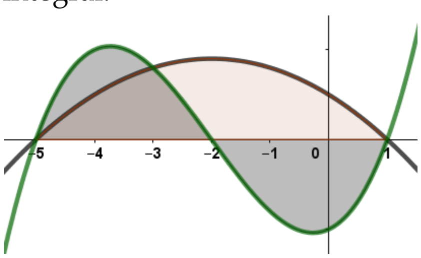


Figura 14. Gráfica de la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

Si resolvemos la integral definida, el valor obtenido correspondería al área de la parábola que pasa por los extremos del intervalo, pero no corresponde a la función que define a la integral en el intervalo $[-5, 1]$.

De esta manera podemos decir, que para que una integral represente un área, es necesario analizar su comportamiento gráfico en el intervalo dado. En el caso de la integral analizada, el área está representada por dos integrales definidas de la forma:

$$A = \int_{-5}^{2} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)dx = \int_{-5}^{-2} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)dx + \int_{-2}^{1} (x^3 + 6x^2 + 3x - 10)dx$$

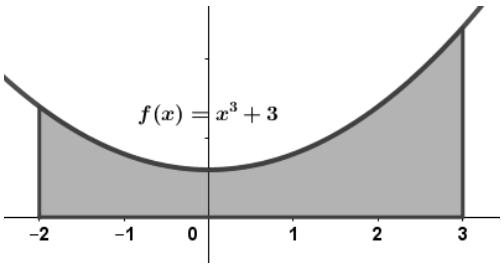
Con base a lo anterior, podemos concluir que para determinar el área de una región para una curva debe considerarse lo siguiente:

- La gráfica de la función en el intervalo.
- Si la gráfica presenta intersecciones con el eje X y éstas se encuentran dentro del intervalo, se debe calcular el área desde el extremo inferior del intervalo hacia cada una de las intersecciones hasta finalizar con el extremo derecho de dicho intervalo.
- Si el área está por encima del eje X, ésta se considera positiva.
- Si el área está por debajo del eje X, ésta se considera negativa por su posición, pero no por su valor. En este caso se toma el valor absoluto de dicha área.

Observa y analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 52 Calcula el área limitada por el eje x, las rectas verticales $x = -2$, $x = 3$ y la función $f(x) = x^2 + 3$

Solución:



Trazando la gráfica en el intervalo [-2, 3], se obtiene la figura de la izquierda. Por lo que se puede apreciar que el área es una sola ya que no presenta intersecciones con el eje X, es positiva y su valor está definida por una sola integral definida:

$$A = \int_{-2}^{3} (x^2 + 3)dx$$

Resolviendo la integral: $$\int_{-2}^{3} (\boldsymbol{x^2 + 3})\boldsymbol{dx} = \frac{\boldsymbol{x^3}}{\boldsymbol{3}} + \boldsymbol{3x}\Big|_{-2}^{3}$$

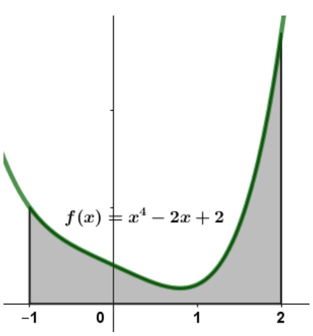
Sustituyendo los límites de integración: $$= \left[\frac{(\mathbf{3})^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} + \mathbf{3}(\mathbf{3})\right] - \left[\frac{(-\mathbf{2})^{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}} + \mathbf{3}(-\mathbf{2})\right]$$

Realizando las operaciones indicadas: $$= \mathbf{18} - \left[\frac{-\mathbf{26}}{\mathbf{3}}\right] = \mathbf{18} + \frac{\mathbf{26}}{\mathbf{3}} = \frac{80}{3}$$

Por lo tanto, el área de la región es: $$A = \int_{-2}^{3} (x^2 + 3)dx = \frac{80}{3}\ u^2$$

Ejemplo 53 *Encuentre el área de la región R bajo* $y = x^4 - 2x^3 + 2$ *entre* $x = -1$ *y* $x = 2$.

Solución:



La gráfica de la región R se muestra en la figura de la izquierda.
De la misma manera que en el ejemplo anterior, se puede observar que el área es una sola en el intervalo dado, por lo que su valor está determinado por la integral:

$$\boldsymbol{A} = \int_{-\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} (\boldsymbol{x^4 - 2x^3 + 2})\boldsymbol{dx}$$

Por lo que procedemos como sigue:

Resolviendo la integral: $$A = \int_{-1}^{2} (x^4 - 2x^3 + 2)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + 2x\right]_{-1}^{2}$$

Sustituyendo los límites de integración:
$$=\left[\frac{(2)^5}{5}-\frac{(2)^4}{2}+2(2)\right]-\left[\frac{(-1)^5}{5}-\frac{(-1)^4}{2}+2(-1)\right]$$

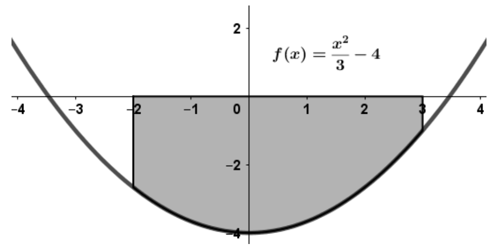
Realizando las operaciones indicadas:
$$=\left(\frac{32}{5}-\frac{16}{2}+4\right)-\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-2\right)$$
$$=\left(\frac{12}{5}\right)-\left(-\frac{25}{10}\right)$$
$$=\frac{12}{5}+\frac{25}{10}=\frac{51}{10}$$

Por lo tanto, el área de la región es: $A=\int_{-1}^{2}(x^4-2x^3+2)dx=\frac{51}{10}\,u^2$

Ejemplo 54 Encuentre el área de la región acotada por $y=\frac{x^2}{3}-4$, , el eje x, $x=-2$ y $x=3$.

Solución:

La gráfica de la función en el intervalo dado se muestra en la figura de la derecha.



Observa que el área se encuentra por debajo del eje X, por lo que se considera negativa[36] por su posición, pero no en su valor. Asimismo, el área es una sola en el intervalo dado y su valor queda determinada por la integral:

$$\boldsymbol{A=-\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3}-4\right)dx}$$

Por lo tanto, procedemos a resolver:

Resolviendo la integral:
$$\boldsymbol{A=-\int_{-2}^{3}\left(\frac{x^2}{3}-4\right)dx=\int_{-2}^{3}\left(-\frac{x^2}{3}+4\right)dx=\left[-\frac{x^3}{9}+4x\right]_{-2}^{3}}$$

Sustituyendo los límites de integración:
$$\boldsymbol{=\left[\left(-\frac{(3)^3}{9}+4(3)\right)-\left(-\frac{(-2)^3}{9}+4(-2)\right)\right]}$$

Realizando las operaciones indicadas:
$$\boldsymbol{=\left(-\frac{27}{9}+12\right)-\left(\frac{8}{9}-8\right)}$$
$$\boldsymbol{=(9)-\left(-\frac{64}{9}\right)}$$
$$\boldsymbol{=9+\frac{64}{9}=\frac{145}{9}}$$

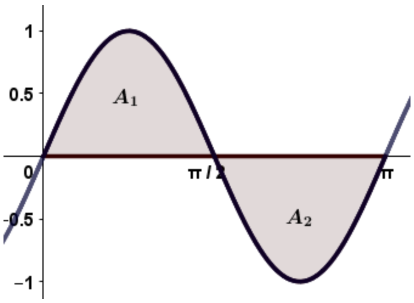
---

[36] El área es un número no negativo. Si la gráfica de $y=f(x)$ está por debajo del eje X, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es un número negativo y, por lo tanto, no puede ser un área. Sin embargo, sólo es el negativo del área de la región acotada por $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, y $y=0$.

Por lo tanto, el área de la región R es: $A = \frac{145}{9}\ u^2$

Ejemplo 55 Calcular el área definida por la integral $\int_0^{\pi} sen\ 2xdx$

Solución:



La gráfica de la función en el intervalo dado $[0, \pi]$, muestra que la curva presenta una intersección con el eje X, lo que significa que el área en dicho intervalo está compuesta por dos regiones:

- El área A_1, que está definida en el subintervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, y
- El área A_2, definida en el subintervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Esta última área por su posición se considera negativa. Por lo tanto, el área de la región se obtiene como:

$$\boldsymbol{A = A_1 - A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\ 2xdx =}$$

Resolviendo la integral ambas integrales: $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ 2xdx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sen\ 2xdx = -\frac{1}{2} cos\ \ 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[-\frac{1}{2} cos\ \ 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$

Realizando las operaciones indicadas: $A = -\frac{1}{2} cos\ \ 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} cos\ \ 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

Sustituyendo los límites de integración: $A = \left[-\frac{1}{2} cos\, 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} cos\, 2(0)\right] + \left[\frac{1}{2} cos\, 2(\pi) - \frac{1}{2} cos\, 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

Realizando las operaciones indicadas:

$$= \left[-\frac{1}{2} cos(\pi) + \frac{1}{2} cos(0)\right] + \left[\frac{1}{2} cos\, 2(\pi) - \frac{1}{2} cos\, \pi\right]$$

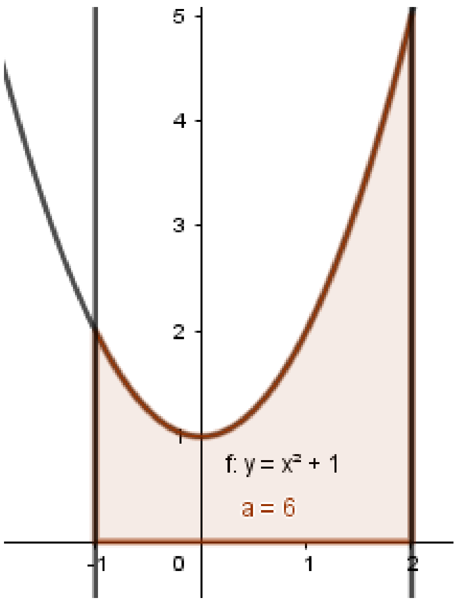
$$= \left[-\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1)\right] + \left[\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(-1)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right] = 1 + 1 = 2$$

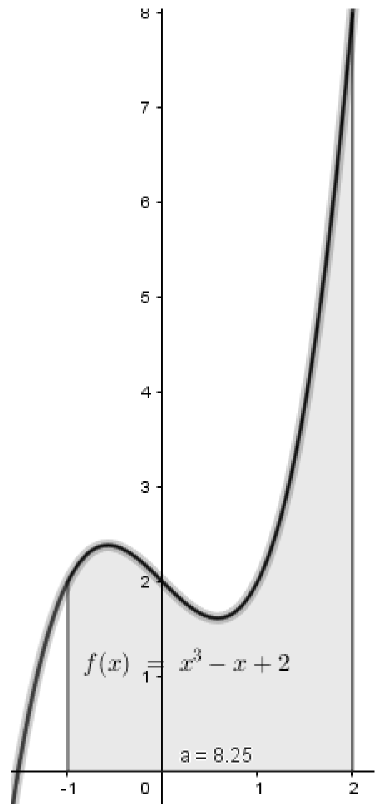
Por lo tanto, el área de la región R es: $A = 2\, u^2$

ACTIVIDAD 13 *Dadas las siguientes figuras, determina el área sombreada.*

A. $y = x^3 + 1$



B. $f(x) = x^3 - x + 2$



Esta actividad se evaluará con el **Anexo G**

ACTIVIDAD 14. Área entre dos curvas.

- **Aprendizaje Esperado:**
  - Aplica la integral definida para obtener áreas bajo la curva de funciones que se relacionen con situaciones de su entorno promoviendo el desarrollo de su creatividad.

- **Atributo (s):**
  - Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
  - Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
  - Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo como cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.

- **Conocimiento (s):**
  - Área entre dos curvas.

Lectura previa: Área entre dos curvas

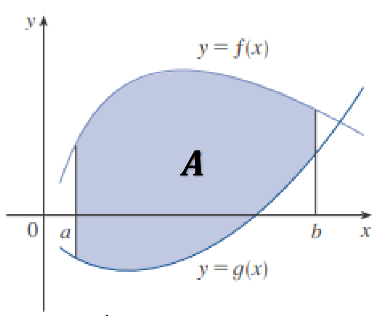


Figura 15. Área comprendida entre dos curvas

De manera similar a como se obtiene el área bajo una curva con la integral definida, es posible determinar el área entres dos curvas, a partir de las siguientes condiciones:

“Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) > g(x)$, como se muestra en la figura 15, entonces el área entre las curvas está determinada por:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

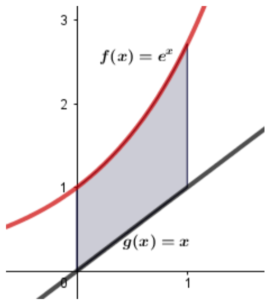
Donde a y b son los extremos del intervalo”.

Para determinar el área comprendida entre las curvas, considera lo siguiente:

- Si se conocen los extremos del intervalo, se procede de manera inmediata en la aplicación de la expresión anterior.
- Si no se conocen los extremos del intervalo, es necesario determinar los puntos de intersección de ambas curvas. En este caso se igualan ambas funciones y se resuelve la ecuación resultante, es decir: $f(x) = g(x)$.
- Siempre es necesario trazar la gráfica de ambas funciones en el intervalo dado.

Analiza los siguientes ejemplos:

Ejemplo 56 *Determinar el área de la región acotada por arriba por $f(x) = e^x$, por abajo por la función $g(x) = x$ y el intervalo $[0,1]$*



Solución:
Trazando ambas funciones en el intervalo dado, se obtiene la gráfica de la izquierda. Nota que la función $f(x) > g(x)$. Por lo tanto, el área está definida por la integral:

$$A = \int_0^1 [e^x - x]dx$$

Resolviendo la integral: $$A = \int_0^1 [e^x - x]dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

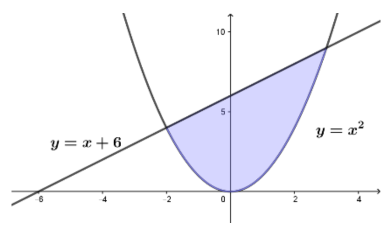
Sustituyendo los límites de integración: $$A = \left[e^1 - \frac{(1)^2}{2}\right] - \left[e^0 - \frac{(0)^2}{2}\right]$$

Realizando las operaciones indicadas: $$A = e - \frac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

Por lo tanto, el área de la región entre las curvas es: $$A \approx 1.218\, u^2$$

Ejemplo 57 *Encuentra el área de la región entre las funciones $y = x^2$ y $y = x + 6$*

Solución
En este caso, no se indica cuál de las funciones es mayor que la otra, es decir, cual está arriba y cual abajo; así como tampoco el intervalo donde se define el área de la región. De acuerdo a las consideraciones anteriores, procedemos como sigue a continuación:



Calculando las intersecciones de las funciones: $f(x) = g(x)$. $$x^2 = x + 6$$

Resolviendo: $$x^2 - x - 6 = 0$$

Factorizando $$(x + 2)(x - 3) = 0$$

Igualando cada factor con cero y despejando x: $$x + 2 = 0 \qquad x - 3 = 0$$
$$x = -2 \qquad x = 3$$

Sustituyendo ambos valores en $f(x)$:[37] $$y = (-2)^2 = 4 \qquad y = (3)^2 = 9$$

[37] En este caso se utilizó la función f(x) para encontrar las coordenadas de los puntos de intersección; sin embargo, también puede utilizarse g(x) para ello, ya que ambas funciones pasan por los mismos puntos.

Por lo tanto, las curvas se intersectan en los puntos $A(-2,4)$ y $B(3,9)$, como se muestra en la figura de arriba; además se aprecia que $x+6 \geq x^2$. Por tanto, acorde a la integral definida se tiene entonces que $f(x)=x+6$ y $g(x)=x^2$ en el intervalo $[-2,3]$ y el área de la región está determinada por:

$$\boldsymbol{A=\int_{-2}^{3}[(x+6)-(x^2)]dx}$$

Integrando y desarrollando tenemos: $A=\int_{-2}^{3}[(x+6)-(x^2)]dx=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$

Sustituyendo los límites de integración: $A=\left[\frac{3^2}{2}+6(3)-\frac{3^3}{3}\right]-\left[\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right]$

Realizando las operaciones indicadas: $A=\left[\frac{9}{2}+18-\frac{27}{3}\right]-\left[\frac{4}{2}-12+\frac{8}{3}\right]$

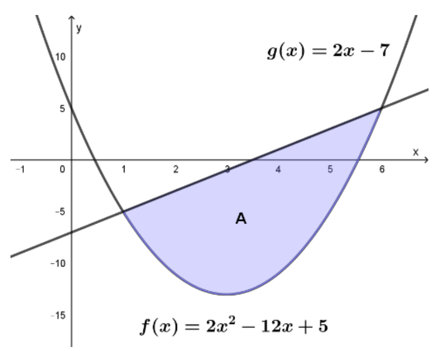
$$A=\left[\frac{27}{2}\right]-\left[-\frac{22}{3}\right]=\frac{27}{2}+\frac{22}{3}=\frac{125}{6}$$

Por lo tanto, el área comprendida entre las funciones es $\frac{125}{6}\ u^2$

Ejemplo 58 Determina el área entre las funciones: $f(x)=2x^2-12x+5$ y $g(x)=2x-7$

Solución:

como en el caso anterior, procedemos a determinar sus intersecciones, puesto que no tenemos los límites de integración y cuál función es mayor.



Igualando las funciones:

$$2x^2-12x+5=2x-7$$

Resolviendo:

$$2x^2-12x+5=2x-7$$
$$2x^2-12x+5-2x+7=0$$
$$2x^2-14x+12=0$$

Dividiendo entre 2: $x^2-7x+6=0$

Factorizando $(x-1)(x-6)=0$

igualando cada factor con cero y despejando x: $x-1=0$, $x=1$ $\quad$ $x-6=0$, $x=6$

Sustituyendo los valores en g(x): $g(1)=-5$ $\quad$ $g(6)=1$

Por lo tanto, la gráfica de ambas funciones pasa por los puntos $A(1,-5)$ y $B(6,1)$, como se muestra en la figura de arriba. Del gráfico se observa que $g(x) \geq f(x)$ y el área de la región está acotada por intervalo $[1, 6]$. Entonces el valor del área se determina como:

$$A = \int_{1}^{6} \left[(2x-7) - \left(2x^2 - 12x + 5\right)\right] dx$$

Realizando las operaciones indicadas antes de integrar se tiene que:

$$A = \int_{1}^{6} \left(-2x^2 + 14x - 12\right) dx$$

Resolviendo la integral: $A = \int_1^6 (-2x^2 + 14x - 12)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{14x^2}{2} - 12x\right]_1^6 = \left[\frac{-2x^3}{3} + 7x^2 - 12x\right]_1^6$

Sustituyendo los límites de integración: $A = \left[\frac{-2(6)^3}{3} + 7(6)^2 - 12(6)\right] - \left[\frac{-2(1)^3}{3} + 7(1)^2 - 12(1)\right]$

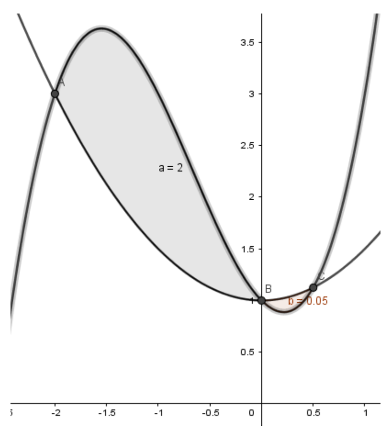
Realizando las operaciones indicadas: $A = \left[(36) - \left(\frac{-17}{3}\right)\right] = 36 + \frac{17}{3} = \frac{125}{3}$

Por lo tanto, el área de la región entre las curvas es $\frac{125}{3}\ u^2$

Ejemplo 59 *Hallar el área limitada por las funciones* $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$ *y* $g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

Solución:

En este caso, tampoco se conocen los puntos de intersección de ambas funciones y cuál de ellas es la mayor. Por lo que procedemos a determinar sus intersecciones igualando las funciones y resolvemos:



$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 + 2x^2 - x + 1 = \frac{x^2}{2} + 1$$

Igualando a cero y reduciendo términos:

$$x^3 + 2x^2 - \frac{x^2}{2} - x + 1 - 1 = 0$$
$$x^3 + \frac{3x^2}{2} - x = 0$$

Se factoriza la expresión obtenida: $x\left(x^2 + \frac{3x}{2} - 1\right) = 0$

Se iguala cada factor con cero: $x = 0$ $\qquad x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = 0$

Se factoriza el segundo factor y se iguala a cero cada nuevo factor:

$$x^2 + \frac{3x}{2} - 1 = 0$$
$$(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Igualando los nuevos factores con cero y despejando

$$x + 2 = 0 \qquad x - \frac{1}{2} = 0$$
$$x = -2 \qquad x = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, las funciones se intersectan en los puntos $x = -2$, $x = 0$, y $x = \frac{1}{2}$. Su gráfica se muestra en la figura de arriba.

Para hallar el área comprendida entre las dos curvas, notamos de la gráfica la existencia de dos áreas generadas: la primera se observa en el intervalo $[-2{,}0]$ y la segunda en $[0{,}0.5]$. Asimismo, se aprecia que $f(x) > g(x)$. La integral asociada al área de toda la región es:

$$\int_{-2}^{0.5}\left[(x^3 + 2x^2 - x + 1) - \left(\frac{x^2}{2} + 1\right)\right]dx = \int_{-2}^{0.5}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)dx$$

Específicamente para las áreas contenidas en toda la región es:

$$A = \int_{-2}^{0.5}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)dx = \int_{-2}^{0}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)dx + \int_{0}^{0.5}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)dx$$

Calculando el área A_1 en el intervalo [-2,0]:

$$A_1 = \int_{-2}^{0}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}$$

$$= \left[\frac{(0)}{4} + \frac{(0)}{2} - \frac{0}{2}\right] - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right] = 0 - \left(\frac{16}{4} + \frac{-8}{2} - \frac{4}{2}\right)$$

$$= 0 - (4 - 4 - 2) = 0 - (-2) = 0 + 2 =$$

$$A_1 = 2\,u^2$$

Calculando el área A_2 en el intervalo [0, 0.5]:

Observa que cuando en la expresión todos los términos tienen la variable x y al sustituirlas por 0, el resultado es 0, por lo tanto, solo tiene sentido sustituir 0.5.

$$A_2 = \int_{0}^{0.5}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{3x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{0.5} = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{0.5}$$

$$= \left[\frac{(0.5)^4}{4} + \frac{(0.5)^3}{2} - \frac{(0.5)^2}{2}\right] = (0.015625 + 0.0625 - 0.125)$$

$$A_2 = -0.05\, u^2$$

Nota que el resultado es negativo, esto debido a que en el intervalo [0,0.5], en la gráfica se puede observar que $g(x) > f(x)$, por lo tanto, tomamos el valor absoluto del área, es decir:

$$A_2 = |-0.05\, u^2| = 0.05\, u^2$$

Finalmente, el área total de la región es:

$$A = 2 + 0.05 \approx 2.05\ u^2$$

ACTIVIDAD 14

Determina el área comprendida entre las curvas dadas. Traza la gráfica en cada caso. Usa como recurso de apoyo algún graficador.

A. $f(x) = 2 - x^2$ $g(x) = x$	B. $f(x) = x^2 + 2x + 1$ $g(x) = -x + 5$	C. $f(x) = \frac{x^3}{2}$ $g(x) = 2x$

Esta actividad se evaluará con el **Anexo G**.

INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

Anexo A. Rúbrica para evaluar la capacidad de análisis, clasificación.

Puntuación máxima 20 puntos dividido entre 2 para obtener el total.
Propósitos: Aplica los conceptos de diferenciales.

Niveles / Criterio a Evaluar	Excelente (4)	Bueno (3)	Satisfactorio (2)	Deficiente (1)
Comprensión del tema	Demuestra una total comprensión sobre los conceptos básicos de las diferenciales. Enfatizando la importancia de sus formas de aplicación, interpretación y solución a situaciones cotidianas.	Entiende los conceptos básicos de las diferenciales, estableciendo su aplicación, interpretación y posibles soluciones.	Indica los conceptos básicos, sin detallar ideas principales.	Relata la información sin especificar su importancia.
Habilidades en las actividades	Calcula correctamente la derivada y la diferencial empleando mediante ejemplos.	Repite los cálculos para obtener los resultados correctos, omite información al momento de explicarlo.	Realiza muchas veces el mismo procedimiento sin obtener resultados correctos.	Plasma la información de toma confusa y errónea.

PUNTUACIÓN FINAL	PUNTUACIÓN DEL CRITERIO

Anexo B. Lista de cotejo.

Indicadores	SI	NO	Observaciones
Obtiene los datos necesarios para le resolución del problema a partir de la información proporcionada.			
Aplica la definición de diferencial para determinar la aproximación de la variable.			
Convierte las unidades de medida para una adecuada interpretación del resultado.			
Realiza las operaciones correctamente en el contexto conceptual y de procesos matemáticos.			
Realiza cálculos de sustitución para encontrar la aproximación de la variable.			
Fortalezas:			
Aspectos a mejorar:			
Conclusiones:			

Dos puntos por indicador, para un total de 10 puntos

Anexo C. Lista de cotejo. Resolución problemas

Desempeño a evaluar: Capacidad de solución de problemas.

No.	Indicador	Cumplimiento		Ejecución	
		Sí	No	Ponderación	Puntuación
1	Entrega en tiempo y forma.			1	
2	Identifica qué técnica debe emplear.			1	
3	Limpieza y orden en la resolución de los ejercicios.			1	
4	Identifica y aplica los procedimientos de forma correcta de la integral.			2	
5	Presenta adecuadamente los procedimientos.			2	
6	Resuelve las integrales correctamente y obtiene el resultado general.			3	
Calificación: _______________					

Anexo D. Lista de cotejo. Resolución problemas

Desempeño a evaluar: Capacidad de solución de problemas.

No.	Indicador	Cumplimiento		Ejecución	
		Sí	No	Ponderación	Puntuación
1	Entrega en tiempo y forma.			1	
2	Identifica qué técnica debe emplear.			1	
2	Limpieza y orden en la resolución de los ejercicios.			1	
3	Identifica y aplica los procedimientos de forma correcta de la integral.			2	
4	Presenta adecuadamente los procedimientos.			2	
5	Resuelve las integrales correctamente y obtiene el resultado general.			3	
Calificación: __________					

Anexo E. Autoevaluación.

Desempeño a evaluar: Bloque II integrales indefinidas.

Acciones		Criterios		
		1	2	3
Forma de trabajo	Analizo los conceptos hasta comprenderlos totalmente.			
	Ejecuto los procedimientos planteados en la resolución de problemas.			
	Sigo con atención las indicaciones del cuadernillo, en la explicación de los ejercicios.			
Trabajo Classroom u otro medio	Realizo a tiempo las tareas indicadas.			
	Busco apoyo bibliográfico extra en las dudas que tengo.			
	Manifiesto mis dudas en el momento oportuno.			
	Comparto mis experiencias de trabajo con los compañeros de clase.			

Descripción de valores: 1-Nunca / 2- Regularmente / 3- Siempre /

Anexo F. Lista de cotejo. Resolución de ejercicios

No.	Indicador	Nivel de logro			
		Siempre	Casi siempre	Algunas veces	Nunca
1	Realiza integrales sencillas sin el apoyo de un formulario.				
2	Reconoce el procedimiento necesario para resolver integrales indefinidas.				
3	Aplica el método de integración por partes para resolver integrales que involucran el producto de funciones.				
4	Identifica las funciones en la que se puede aplicar el método de fracciones parciales.				
5	Aplica el método de fracciones parciales para resolver integral que involucran el cociente de polinomios.				

Anexo G. Lista de cotejo. Resolución de ejercicios y problemas

No.	Indicador	Cumplimiento		Ejecución	
		Sí	No	Ponderación	Puntuación
1	Entrega en tiempo y forma.				
2	Limpieza y orden en la resolución de los ejercicios.				
3	Identifica y aplica los procedimientos de forma correcta en la resolución de los ejercicios.				
4	Presenta resultados correctos.				
Calificación: __________					

BIBLIOGRAFÍA

Básica:

Leithold, L., (2009). *El Cálculo*. México: Oxford University Press.

Martínez de G. et. al., (2009). *Cálculo diferencial e integral*. México: Santillana.

Mora V., Emiliano y del Río, F. M., (2009). *Cálculo diferencial e integral: Ciencias sociales y económicas administrativas*. México: Santillana.

Ortiz, F. J., (2007). *Cálculo Integral*. México: Grupo Editorial Patria.

Stewart, J. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: CENGAGE Learning.

Salazar, Bahena y Vega. (2007). *Cálculo Integral.* México: Grupo Editorial Patria.

Complementaria:

Albaladejo, P. (2009). *Problemas de Cálculo para la economía y la empresa*. México: Tebar.

Anfossi, A. (2009). *Cálculo Diferencial e Integral Preparatoria.* México: Progreso.

Anton, H., (2009). *Cálculo de una Variable Trascendentes Tempranas*. México: Limusa.

Caballero C. (2009). *Iniciación al Cálculo Diferencial e Integral*. México: Esfinge.

Granvilley Smith., (2010). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Limusa.

Stewart, J. (2010). *Cálculo Conceptos y Contextos*. México: CENGAGE Learning.

Stewart, J (1998). *Cálculo de una variable.* México. Thomas Editoriales

Budnick, S. (2006). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales*.

Goldstein, Larry et. Al (1990). *Cálculo y sus aplicaciones*. México: Prentice Hall hispanoamericana.

Larson, Hostetler, Edwards (1999). *Cálculo y geometría analítica*. México. Mc Graw Hill. Volumen, Sexta edición

Fox G., Ortiz A. (2016). *Cálculo Integral* (1a ed.) México: Nueva Imagen

Edwin J., Dale V, Steven E. (2007). *Cálculo diferencial e Integral* (9ª Ed) México: PEARSON EDUCACIÓN.

Dennis G., Warren S. (2011). *Cálculo Trascendentes tempranas* (4ª ed.) México: Mc. Graw Hill.

Electrónica:

La pizarra de fonemato (s.f). *Matemáticas para bachillerato y carrera de ciencias*: *Introducción al cálculo integral*. Consultado el 14 de diciembre de 2021. https://www.matematicasbachiller.com/libros/introduccion-al-calculo-integral

Salomón Alarcón (2017). Cálculo integral. Apuntes Mat 22. http://salarcon.mat.utfsm.cl/PDF/Alarcon-APUNTES-MAT022.pdf

Francisco Javier (s.f.). Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable. Departamento de Análisis Matemático Universidad de Granada. Consultado el 14 de diciembre de 2021 https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

Instituto de Matemática y Física Universidad de Talca (s.f.). *Sesión 2: Fórmulas de integración*. Consultado el 14 de diciembre de 2021. http://matesup.cl/portal/apuntes/calculo2/cap02.pdf

Matesfacil (s.f.). *Identidades trigonométricas y aplicación*. Consultado el 14 de diciembre de 2021 https://www.matesfacil.com/ESO/trigonometria/identidades/identidades-trigonometricas-demostraciones-ejemplos.html